

تحلیل سازه ۱

تعداد واحد: ۳

نوع واحد: نظری و اجباری

پیشنیاز: مقاومت مصالح ۱

سرفصل درس: (۴۸ ساعت)

- ۱- سیستمهای سازه‌ای: سازه‌های معین و نامعین استاتیکی- پایداری و ناپایداری سازه‌ها، ترسیم نمودارهای نیروهای داخلی به صورت دو و سه بعدی
- ۲- محاسبه تغییر مکان سازه‌ها با روشهای لنگر مساحت- بار الاستیک و تیر مزدوج
- ۳- روشهای انرژی و کاربرد آنها در محاسبه تغییر مکانهای سازه‌ها: قضایای اول و دوم کاستیلیانو، قضیه ماکسول بتی
- ۴- روش کار مجازی، محاسبه تغییر مکان
- ۵- تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی: روش تغییر مکان، روش نیرو، جمع اثر قوا، اثر نشستهای تکیه‌گاهها و حرارت
- ۶- روش شیب افت و کاربرد آن در تحلیل تیرهای سراسری و قابها (مقاطع ثابت و متغیر)
- ۷- روش پخش ممان و روش کانی
- ۸- خطوط تاثیر سازه‌های معین و نامعین استاتیکی
- ۹- روشهای تقریبی جهت تحلیل سازه‌های اسکلتی



« بنام سمیع خاوشان »

الف. سرفصل ها :

- ۱- سیستم های سازه ای : سازه های معین و نامعین استاتیکی - باینداری و ناپاینداری سازه
- ۲- محاسبه تغییر مکان سازه های باروش لنگر سطح ، بارالاستیک و تیرمردوم
- ۳- روش های انرژی و کاربرد آنها در محاسبه تغییر مکان های سازه - قضایای اول و دوم گاستیلیانو
- ۴- روش کار مجازی - محاسبه تغییر مکان
- ۵- تحلیل سازه های نامعین استاتیکی - روش تغییر مکان - روش نیرو - جمع آثار قوا
- ۶- روش ضربه افت و کاربرد آن در تحلیل تیرهای لرزایی و قاب ها
- ۷- روش محسوس همان و روش کانی
- ۸- خطوط تأثیر سازه های معین و نامعین استاتیکی
- ۹- روش های تقریبی جهت تحلیل سازه های اسکلتی

ب. منابع :

- ۱- تحلیل سازه های شاپور طاهونی - انتشارات جهاد دانشگاهی واحد صنعتی امیرکبیر
- ۲- تحلیل سازه های مین صباغیان - انتشارات سری عمران

ج. ارزشیابی :

- ۱- امتحان پایان ترم
- ۲- امتحان میان ترم
- ۳- تمرینات کلاسی

فصل اول: سیستم های سازه ای

$\sum F_x = 0$
 $\sum F_y = 0$
 $\sum M_z = 0$

۱- حالت دوبعدی

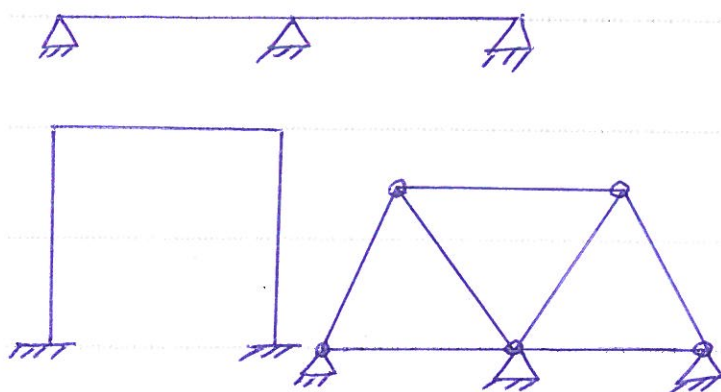
$\sum F_x = 0$
 $\sum F_y = 0$
 $\sum F_z = 0$
 $\sum M_x = 0$
 $\sum M_y = 0$
 $\sum M_z = 0$

۲- حالت سه بعدی

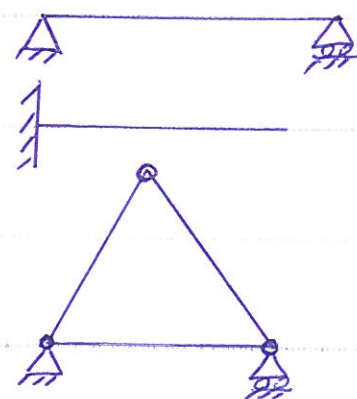
۱- معین: با معادلات تعادل قابل حل است

سازه:

۲- نامعین: با معادلات تعادل و معادلات سازگاری قابل حل است.



سازه های نامعین



سازه های معین

درجه نامعینی: هر سازه متعادلی دارای تعدادی مجهول و معادله در روند حل سازه می باشد به تفاضل تعداد مجهولات و معادلات در یک سازه، درجه نامعینی گفته می شود.

۱- محاسبه درجه نامعینی در قالب های دوبعدی:

$$DI = (r + 3k) - (c + 3)$$

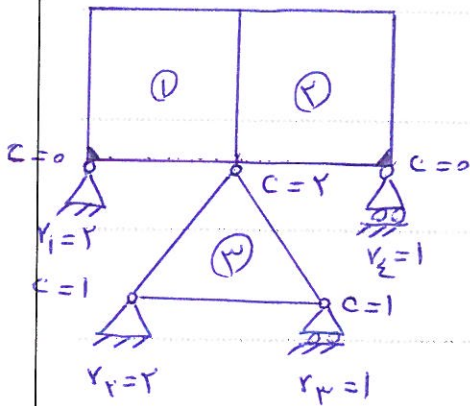
DI: درجه نامعینی

r: تعداد علی العین های تکیه گاهی مجهول

c: تعداد معادلات ربط

k: تعداد حلقه های بسته موجود در سازه

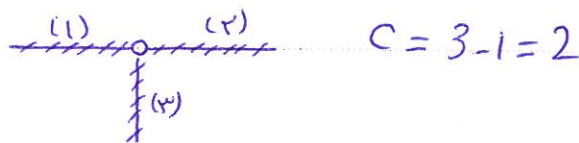
مثال ۱: در سازه مقابل درجه نامعینی سازه را بدست آورید.



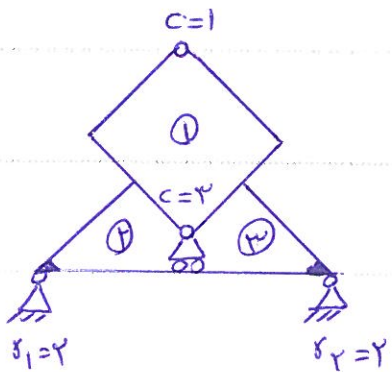
$$\begin{cases} r = 2 + 2 + 1 = 6 \\ c = 2 + 1 + 1 = 4 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$DI = (r + 3k) - (c + 3) = (6 + 3 \times 3) - (4 + 3) = 8$$

نکته ۱: در محل یک مفصل خمشی، تعداد معادلات شرط (C) برابر تعداد اعضای متصل به مفصل



منتهای یک می باشد.

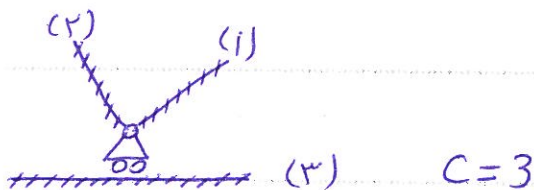


مثال ۲: در سازه مقابل درجه نامعینی سازه را بدست آورید.

$$\begin{cases} r = 2 + 2 = 4 \\ c = 3 + 1 = 4 \\ k = 3 \end{cases}$$

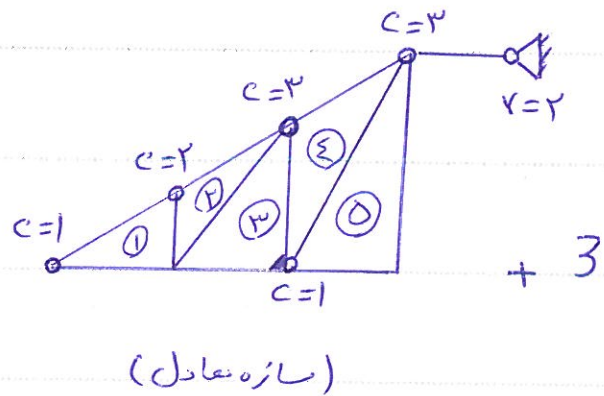
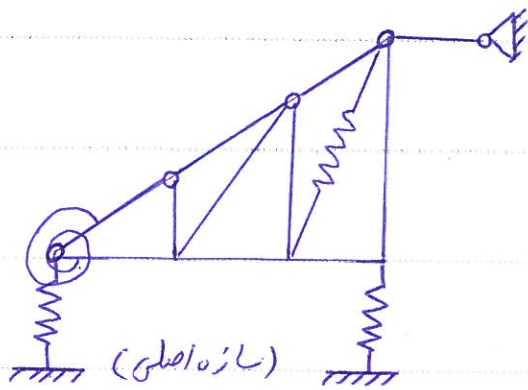
$$DI = (r + 3k) - (c + 3) = (4 + 3 \times 3) - (4 + 3) = 6$$

نکته ۲: در محل یک تکیه گاه غلتکی داخلی (یعنی تکیه گاه غلتکی که به زمین متصل نباشد)، تعداد معادلات شرط (C)



برابر تعداد اعضای متصل به این تکیه گاه می باشد.

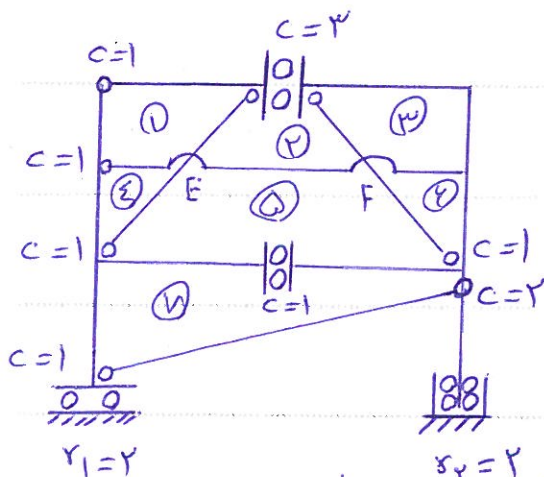
مثال ۳: در سازه مقابل درجه ناهمبندی سازه را بدست آورید.



$$\begin{cases} r=2 \\ C=1+1+2+3+3=10 \\ k=5 \end{cases} \Rightarrow DI = [(r+3k) - (C+3)] + 3 = [(2+3 \times 5) - (10+3)] + 3 = 7$$

نکته: برای ساده تر شدن روند محاسبه درجه ناهمبندی، کلیه ممبرهای انتقالی (تکیه گاه‌های موقت) و ممبرهای دورانی (تکیه گاه‌های داخلی) را از سازه حذف کرده و به تعداد این ممبرهای حذف شده به درجه ناهمبندی می افزاییم. همچنین ممبر انتقالی داخلی را با یک عضو دوری معادل جایگزین می کنیم.

مثال ۴: در سازه مقابل درجه ناهمبندی سازه را بدست آورید. (در نقاط E و F، اعضاء از روی یکدیگر عبور کرده اند)



$$\begin{cases} r=2+2=4 \\ C=1+3+1+1+1+1+2+1=11 \\ k=7-1-1=5 \end{cases}$$

$$DI = (r+3k) - (C+3) = (4+3 \times 5) - (11+3) = 5$$

نکته: در صورتیکه در نقطه ای از سازه دو یا چند عضو از روی یکدیگر عبور کنند، از تعداد ممبرهای سازه به تعداد اعضاء عبور کرده می کمیم.

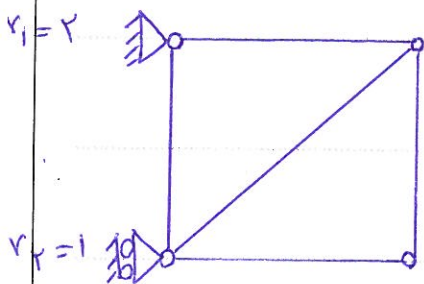
۲- محاسبه درجه ناهمبندی در فرمایابی دو بعدی:

$$DI = (m+r) - 2n$$

m : تعداد اعضاء فرمای

r : تعداد علی التکلیفاتی تکیه گاهی

n : تعداد مفصل فرمای



مثال ۵: در فرمایابی مقابل درجه ناهمبندی سازه را بدست آورید.

$$\begin{cases} m=5 \\ r=2+1=3 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow DI = (m+r) - 2n = (5+3) - 2 \times 4 = 0$$

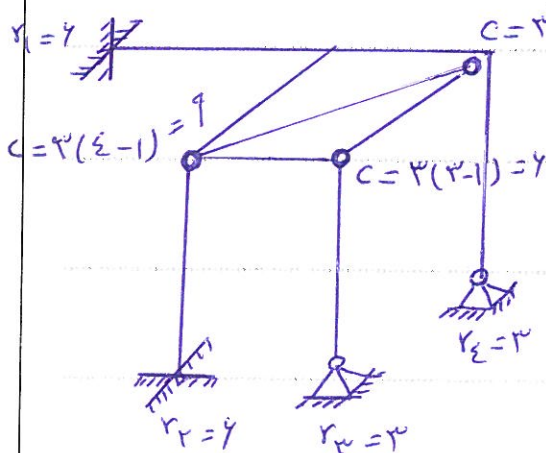
۳- محاسبه درجه ناهمبندی قاب فرمای قیاسی:

$$DI = (6m+r) - (6n+c)$$

m : تعداد اعضاء قاب n : تعداد گره

r : تعداد علی التکلیفاتی تکیه گاهی c : تعداد تکیه گاهها p : تعداد اعضاء متصل به مفصل

$$c = \sum [3 \times (p-1) - (\text{تعداد اعضاء موجود در سازه})]$$



مثال ۶: درجه ناهمبندی قاب زیر را بدست آورید.

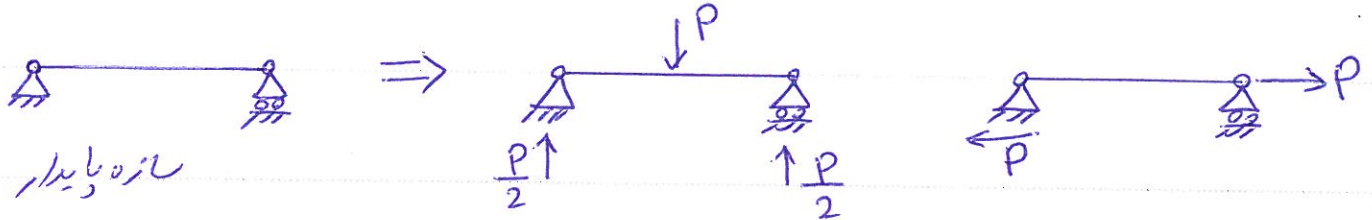
کارشناسی

$$\begin{cases} m=9 \\ r=4+3=7 \\ n=8 \end{cases} \Rightarrow DI = (6m+r) - (6n+c) = (6 \times 9 + 7) - (6 \times 8 + 17) = 7$$

تعداد اعضاء در سازه

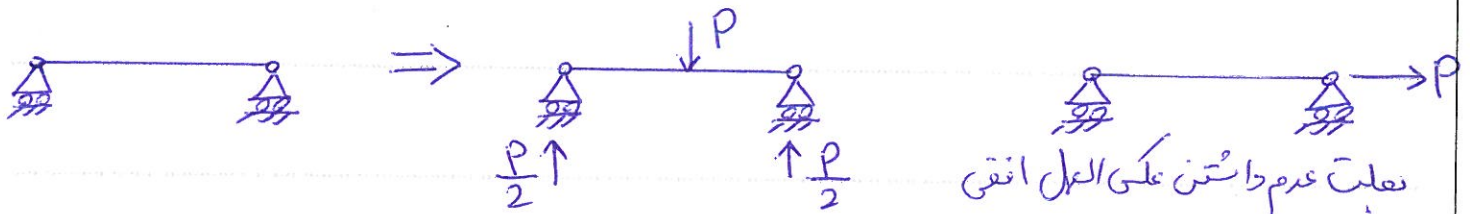
سازه: $\left. \begin{array}{l} ۱- \text{پایدار} \\ ۲- \text{ناپایدار} \end{array} \right\}$

سازه پایدار: سازه‌ای است که با وارد شدن هر نوع بارگذاری بر آن، معادلات تعادل برقرار شود. به عبارت بهتر، سازه در این حالت تحت هر نوع بارگذاری همواره متعادل است.



بارگذاری افقی توسط سازه تحمل می‌شود. بارگذاری قائم توسط سازه تحمل می‌شود.

سازه ناپایدار: در سازه ناپایدار بارگذاری وجود دارد که تحت آن تعادل در سازه برقرار نمی‌شود.



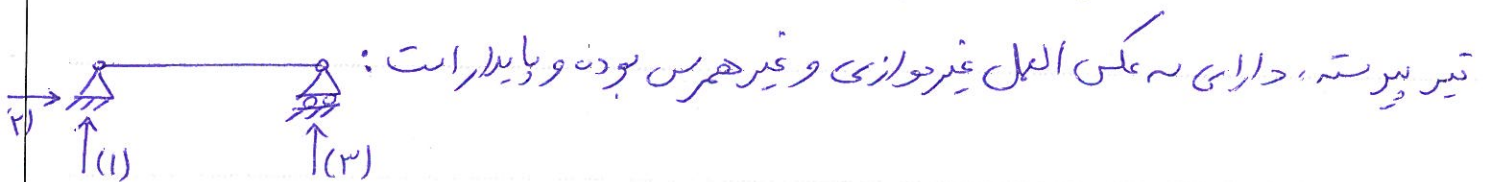
تعادل عدم داشتن علی‌العمل افقی

بارگذاری افقی توسط سازه تحمل نمی‌شود. بارگذاری قائم توسط سازه تحمل می‌شود.

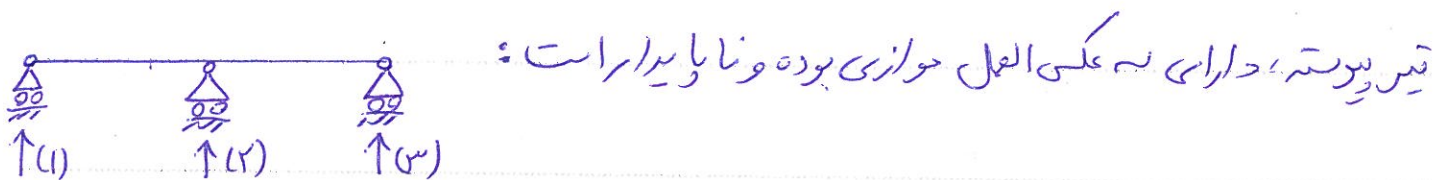
بررسی پایداری سازه:

حالت اول: به علی‌العمل نکیه گاهی از منی نیرو، صورت غیرموازی و غیرهمرس (غیر

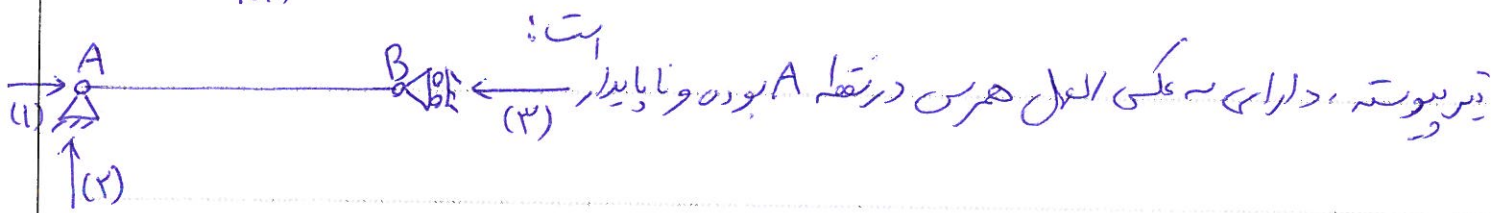
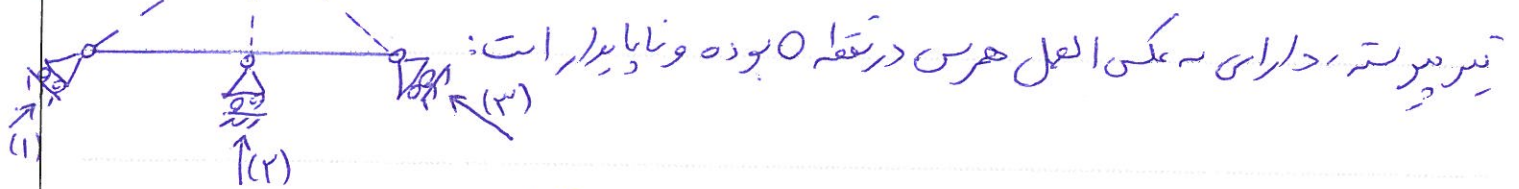
متقارب)، پایداری خارجی یک هم پیوسته را تضمین می‌کند.



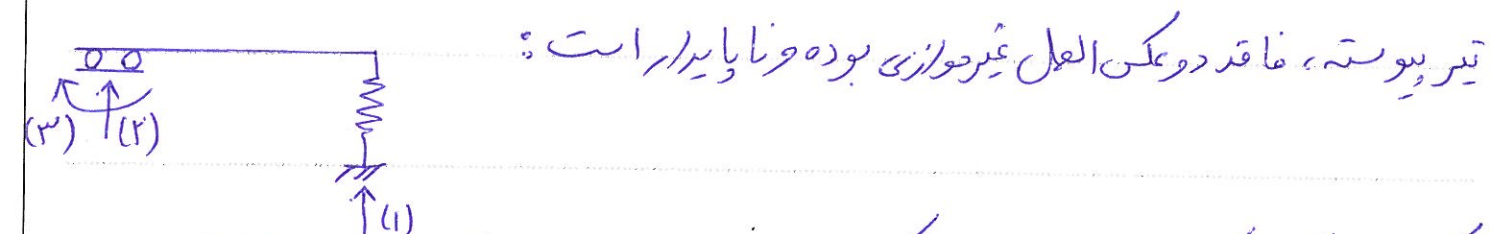
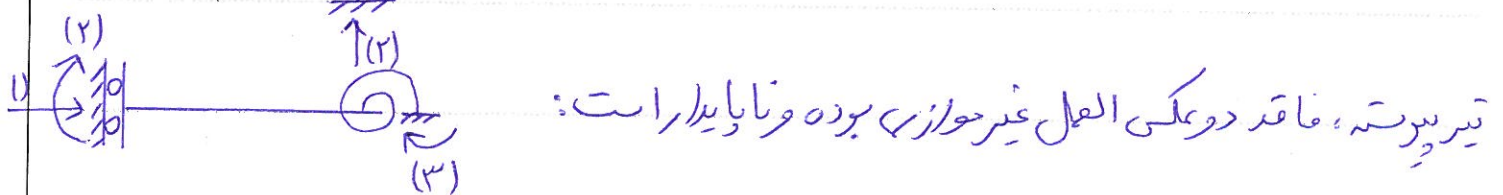
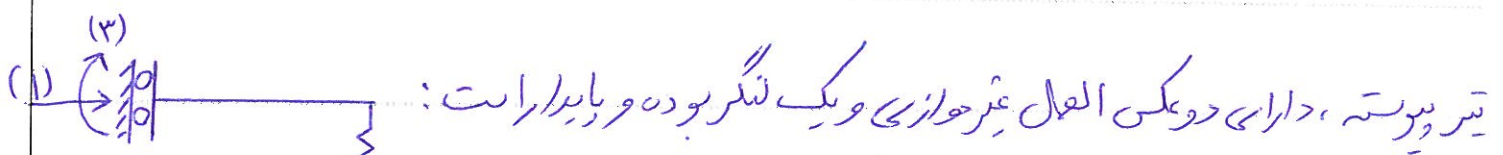
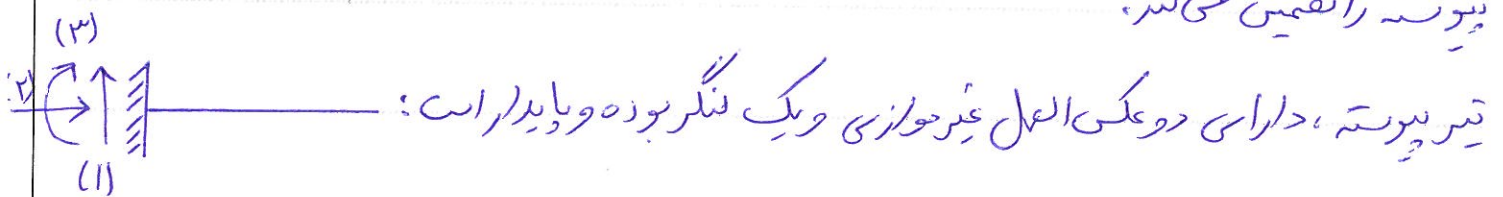
تیر پیوسته، دارای به علی‌العمل غیرموازی و غیرهمرس بوده و پایدار است:



تیر پیوسته، دارای به علی‌العمل موازی بوده و ناپایدار است:



حالت دوم: دو عکس العمل ناخواری و یک عکس العمل از نوع ننگر، پایدار است. یک جسم پیوسته را تقصین می کند.



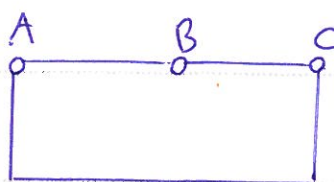
نکته: هنگامی که درجه ناهمبندی داخلی یک جسم عددی بدست آید، جسم لزوماً ناپایدار داخلی است. ولی عکس این موضوع صحیح نیست یعنی اگر درجه ناهمبندی داخلی جسم مثبت باشد، جسم لزوماً پایدار داخلی نخواهد بود.



$$\begin{cases} k=1 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow DI = 3k - c = 3 \times 1 - 4 = -1 \Rightarrow$$

پایدار داخلی نخواهد بود.
بسیار پایدار داخلی است

نکته: هنگامی که به مفصل واقع در یک راستا در کنار یکدیگر قرار بگیریم، به گونه‌ای که مفصل وسط آزادانه بتواند بالا و پایین برود، جسم ناایدار داخلی است.



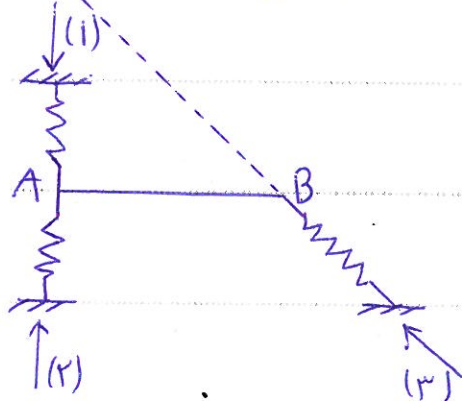
مفصل B می‌تواند آزادانه بالا و پایین برود $\Rightarrow$ ناایدار داخلی

حل همزی

مثال ۷: پایداری و ناایداري سازه زیر را بررسی کنید.

در این سازه به یکی از عمل‌کننده گاهی هم در نقطه O هم AB

را به زمین متصل کرده و این سازه ناایدار است.

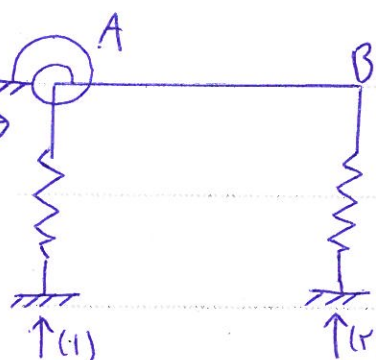


مثال ۸: پایداری و ناایداري سازه زیر را بررسی کنید.

این سازه با توبه به داشتن یک عمل‌کننده از نوع لنگر برای پایداری

نیاز به دو عمل‌کننده غیر موازی دارد. با توبه به نداشتن این ویژگی

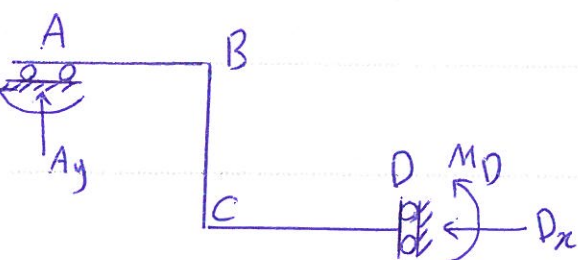
سازه ناایدار است.



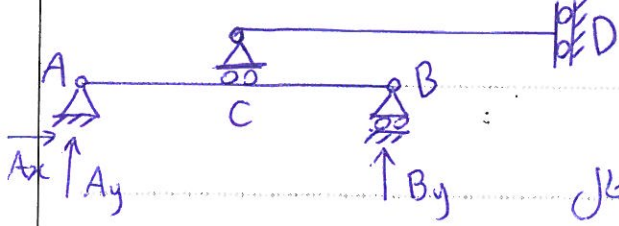
مثال ۹: پایداری و ناایداري سازه زیر را بررسی کنید.

سازه دارای دو عمل‌کننده موازی و دو عمل‌کننده

از نوع لنگر می‌باشد و به واسطه آنها پایداری است.



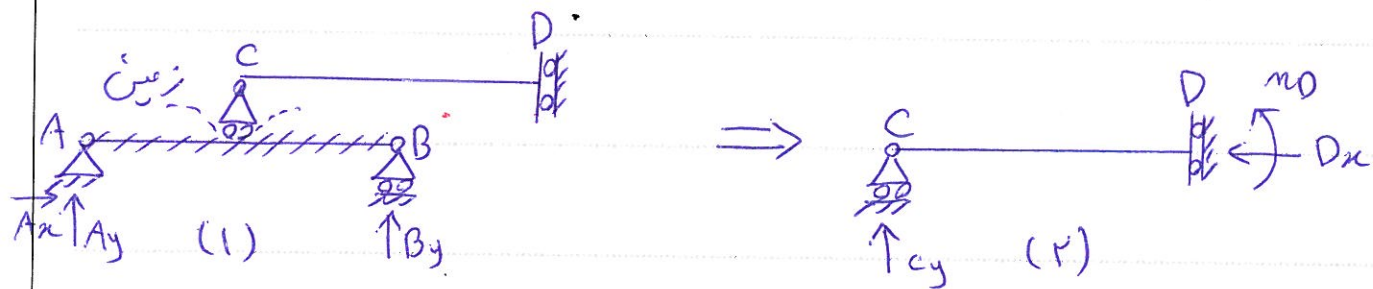
مثال ۱۰: بایدری و نا بایدری سازه زیر را بررسی کنید.



در این سازه قسمت پوسه AB با به یکی العمل مناسب

(A_x ، A_y و B_y) به زمین متصل شده و بایدر است. حال

هر یک از سازه که به آن متصل شود، مانند آن است که به زمین متصل شده باشد.

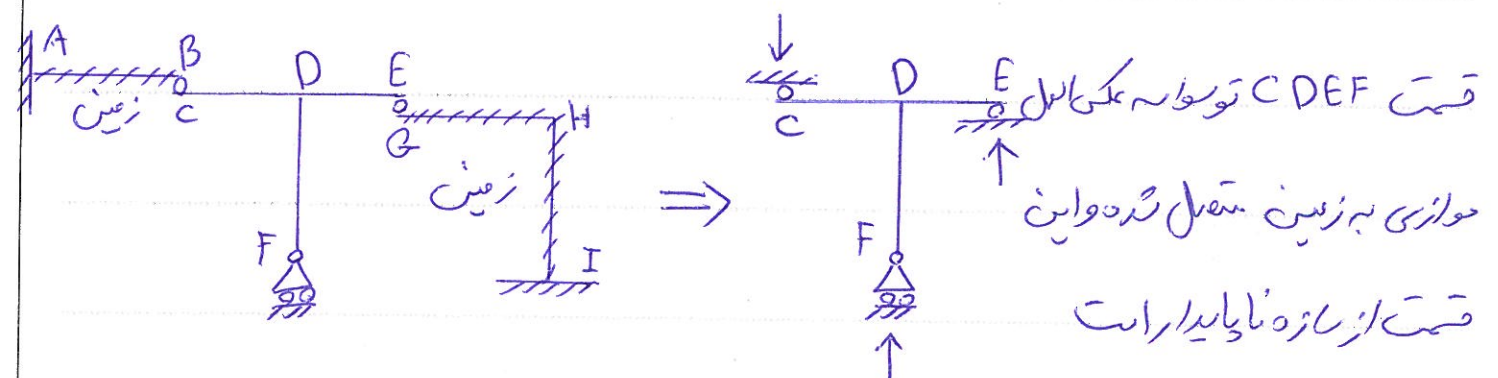
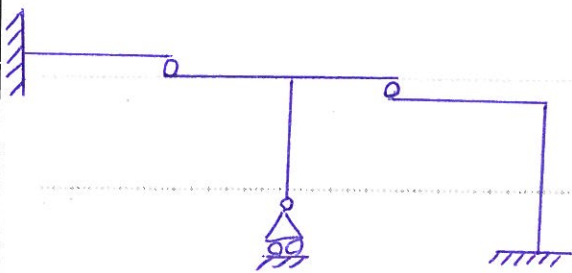


می توان فرض کرد که تیر CD در نقطه C به زمین چسبک شده است و به جایی بررسی بایدری در شکل (۱).

شکل (۲) را بررسی می کنیم. در شکل (۲)، قسمت CD با دو یکی العمل غیر موازی و یک یکی العمل

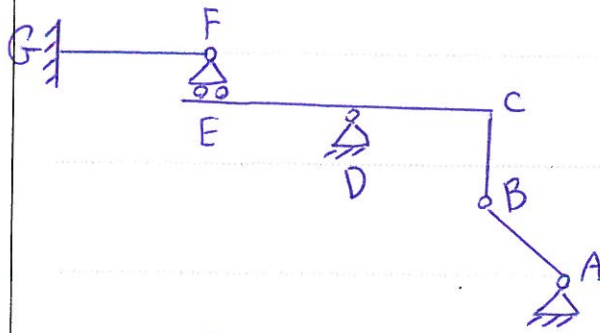
از نوع تگر به زمین متصل شده و این قسمت از سازه بایدر است.

مثال ۱۱: بایدری و نا بایدری سازه زیر را بررسی کنید؟



قسمت CDEF توسط یکی العمل موازی به زمین متصل شده و این قسمت از سازه نا بایدر است

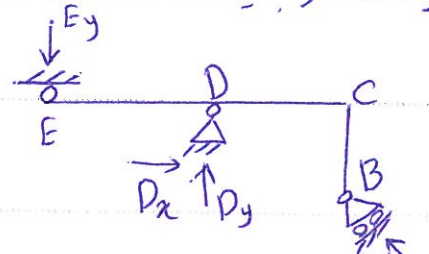
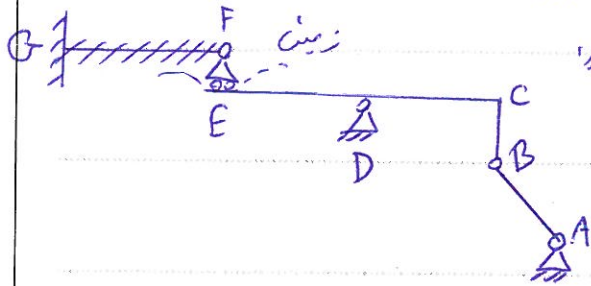
مسئله ۱۲: پایداری و ناپایداری سازه زیر را بررسی کنید؟



این سازه از اتصال به جسم صلب AB ، $BCDE$ و FE

تشکیل شده است. محور پیوسته GF را می توان زمین

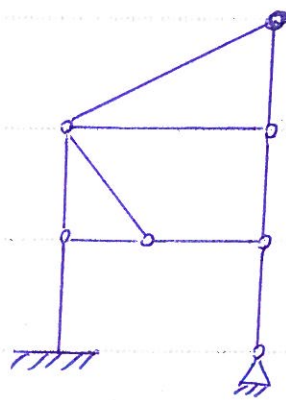
فرعی نمود و سلبه AB را با یک غنک در راستای AB جایگزین کرد.



فصلت $EDCB$ با 45° یکی العمل که به یکی اصل از آن غیر موازی و غیر هم راست است $(D_x, D_y \text{ و } E_y)$

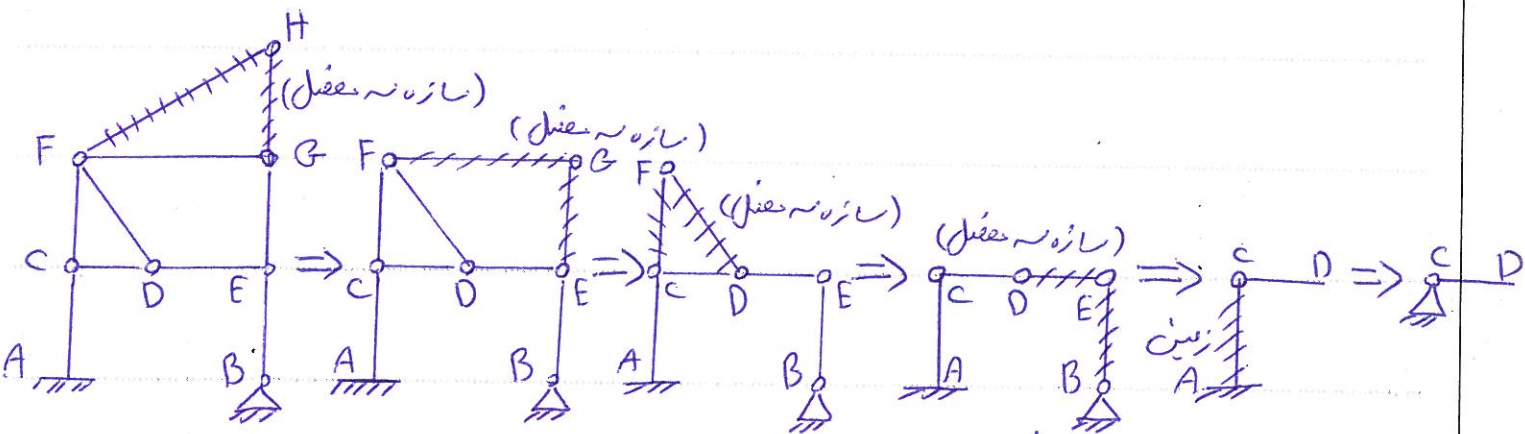
به زمین متصل شده و لزوماً پایدار است.

مسئله ۱۳: پایداری و ناپایداری سازه زیر را بررسی کنید؟



نکته: در بررسی پایداری سازه های فرایین به جهت ساده تر شدن

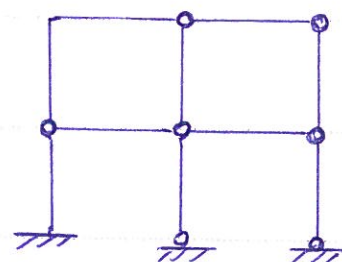
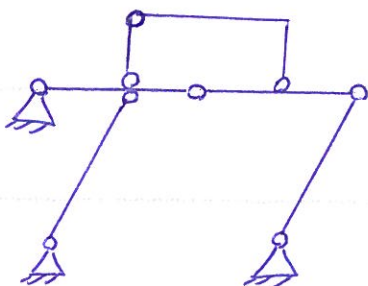
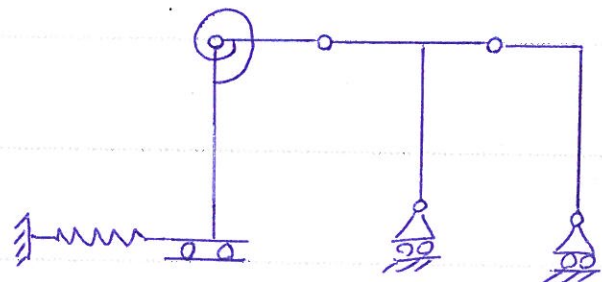
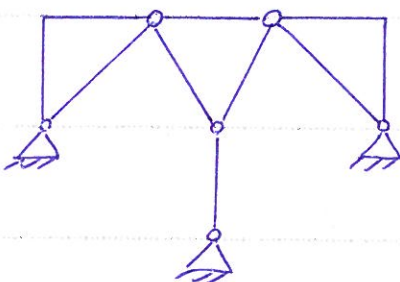
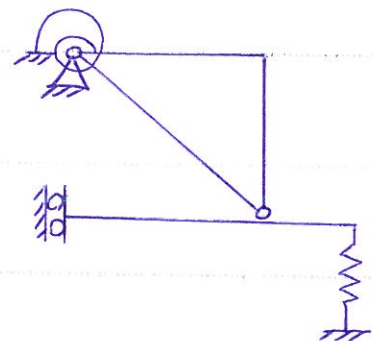
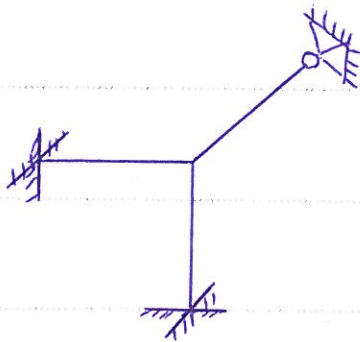
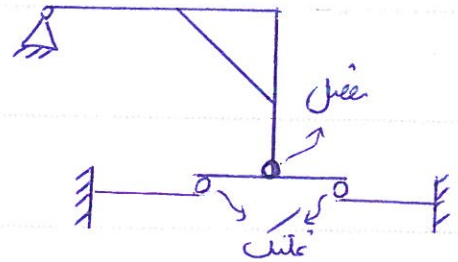
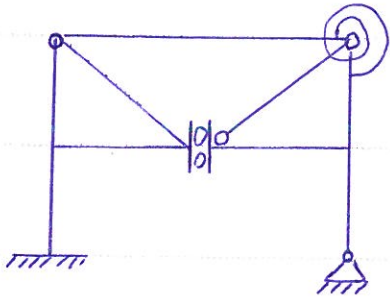
روند حل، می توان فصلت را از سازه اصلی حذف نمود.



فصلت CD با دو یکی اصل یکیده گاه به زمین متصل شده و سازه ناپایدار است

تمهیدات فصل اول

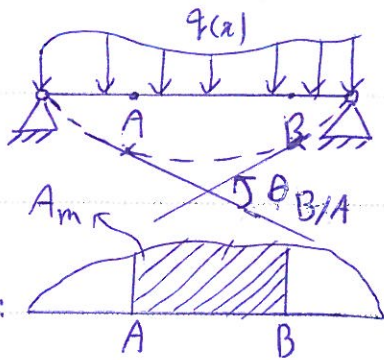
حرکت از سازه های زیر را از لحاظ پایداری بررسی کرده و درجه ناهمبندی آنها را تعیین کنید؟



فصل دوم: محاسبه تغییر مکان سازه ها

قضیه اول گرنی: قضیه اول گرنی:

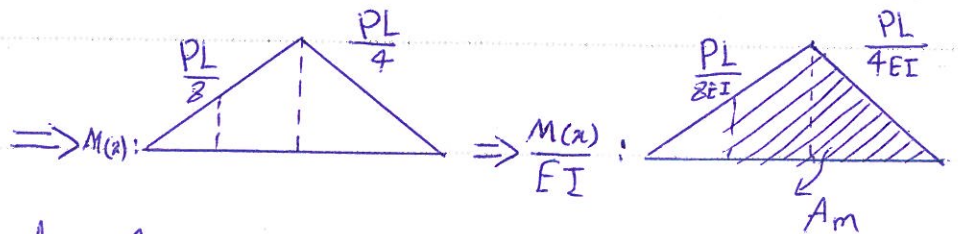
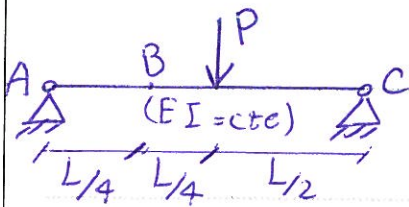
اختلاف شیب در نقطه دلخواه A و B بر روی معنی تغییر شکل الاستیک یک تیر، برابر با معادل زیر خود $\frac{M}{EI}$ تیر بین نقاط A و B می باشد.



$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx = A_m$$

برای محاسبه اختلاف شیب بین A و B، کافی است خود $\frac{M(x)}{EI}$ را رسم کرده و مساحت زیر خود را از A تا B محاسبه کنیم. اگر مساحت زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ در فاصله نقاط A و B مثبت باشد، فلش ساعت شده در A باید در جهت مثبتاتی به مقدار $\theta_{B/A}$ دوران کند تا به راستای در نقطه B برسد و بالعکس.

مثال ۱: در تیر زیر اختلاف شیب بین نقاط B و C را محاسبه کنید؟

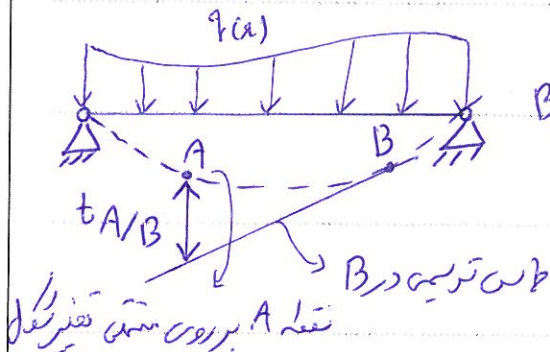


$$\theta_{C/B} = \theta_C - \theta_B = \int_B^C \frac{M}{EI} dx = A_m$$

$$\theta_{C/B} = A_m = \left[\frac{\frac{PL}{4EI} + \frac{PL}{4EI}}{2} \times \frac{L}{4} + \frac{\frac{PL}{4EI} \times \frac{L}{2}}{2} \right] = \frac{7}{64} \frac{PL^2}{EI}$$

فصلیه دوم: لنگر سطح

فاصله نقطه A بر روی مستقیم تغییر شکل (خط بین)، از عارضه تریس در نقطه B بر روی مستقیم تغییر شکل تقریباً با $t_{A/B}$ نشان می دهیم. $t_{A/B}$ معادل با لنگر اول سطح زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ بین نقاط A و B، نسبت به نقطه A می باشد.

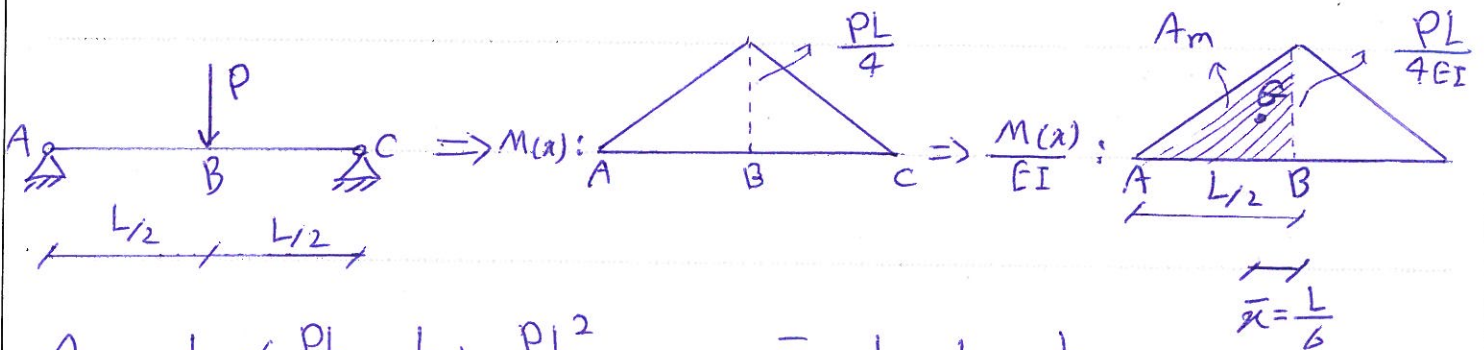


فاصله نقطه A از عارضه ثابت می آوریم $t_{A/B}$: انحراف A از عارضه در B
از این نقطه حالت رسم می شود

$$t_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} \cdot x \, dx = A_m \cdot \bar{x}$$

A_m : سطح زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ بین نقاط A و B
 $\bar{x}$: فاصله مرکز سطح A_m از نقطه A

مثال ۲: در تیر مقابل، فاصله نقطه B بر روی مستقیم تغییر شکل از عارضه تریس در A مقدار است؟ (EI ثابت)

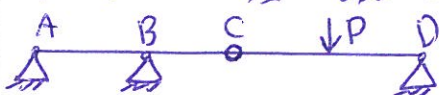


$$A_m = \frac{1}{2} \times \left(\frac{PL}{4EI} \times \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{6}$$

$$t_{B/A} = A_m \times \bar{x} = \frac{PL^2}{16EI} \times \frac{L}{6} = \frac{PL^3}{96EI}$$

نکته: استفاده از قضایای لنگر سطح فقط در مقاطع پیوسته مجاز می باشد. به عبارت دیگر در تیر شکل زیر، اختلاف سب در نقطه B و D را نمی توان از فصلیه اول لنگر سطح محاسبه نمود.

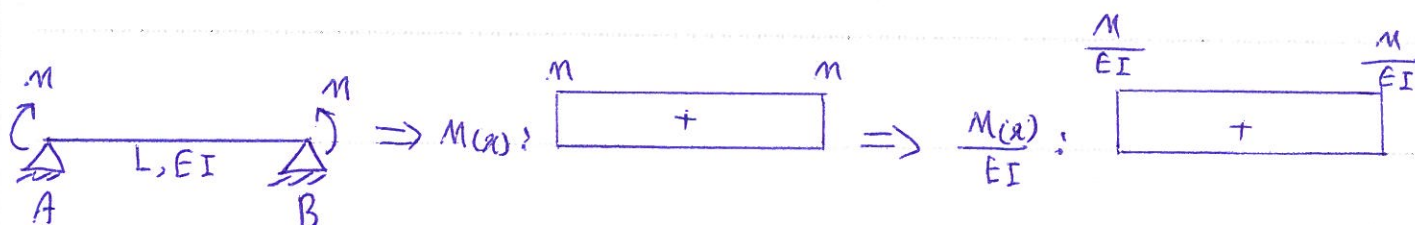


نکته: سافت و محل مرکز سطح یک مستقیم درجه n از روابط زیر بدست می آید.

$$y = cx^n \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m = \frac{ab}{n+1} \\ \bar{x} = \frac{a}{n+2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{بجای } n=1} y = cx^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m = \frac{ab}{3} \\ \bar{x} = \frac{a}{4} \end{array} \right.$$

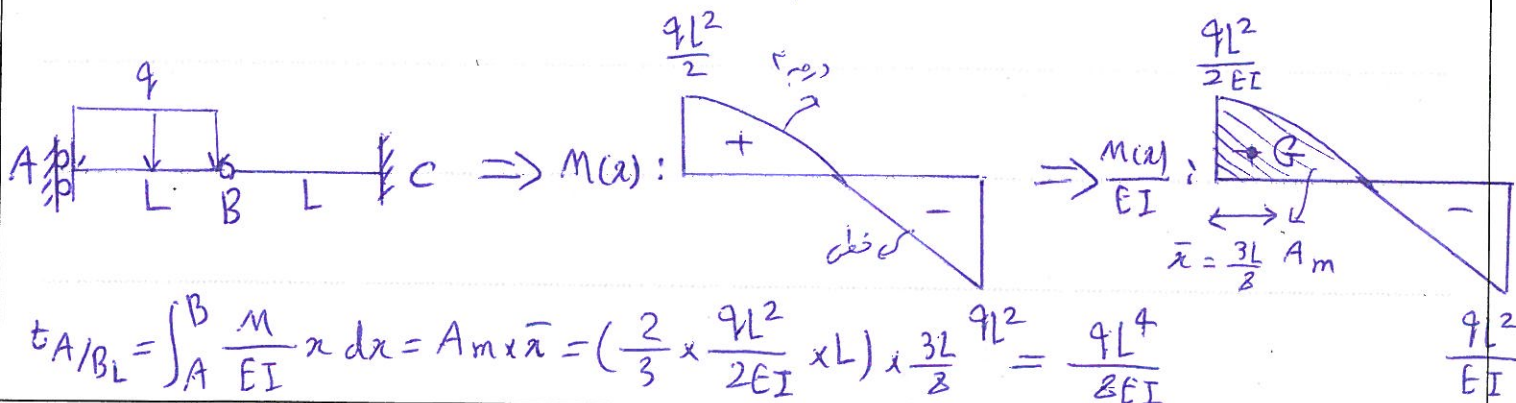
$$y = cx^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m = \frac{2}{3} ab \\ \bar{x} = \frac{5}{8} a \end{array} \right.$$

مثال ۳: در تیر مقابل مقدارهای انحراف از طاس بر B را بدست آورید.



$$A_m = \frac{mL}{EI} \quad \bar{x} = \frac{L}{2} \Rightarrow t_{A/B} = A_m \times \bar{x} = \frac{mL}{EI} \times \frac{L}{2} = \frac{mL^2}{2EI}$$

کارشناس مثال ۴: در تیر مقابل فاصله نقطه A از طاس رسم شده در سمت چپ مفصل B روی مستقیم تیر شکل را بدست آورید.

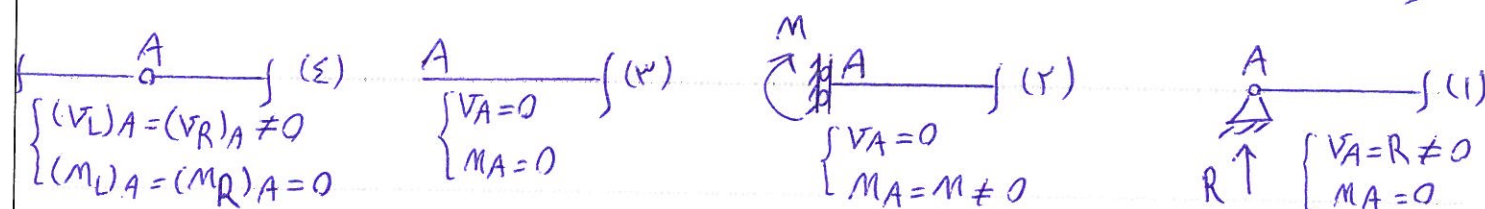


$$t_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx = A_m \times \bar{x} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{2EI} \times L \right) \times \frac{3L}{8} = \frac{qL^4}{8EI}$$

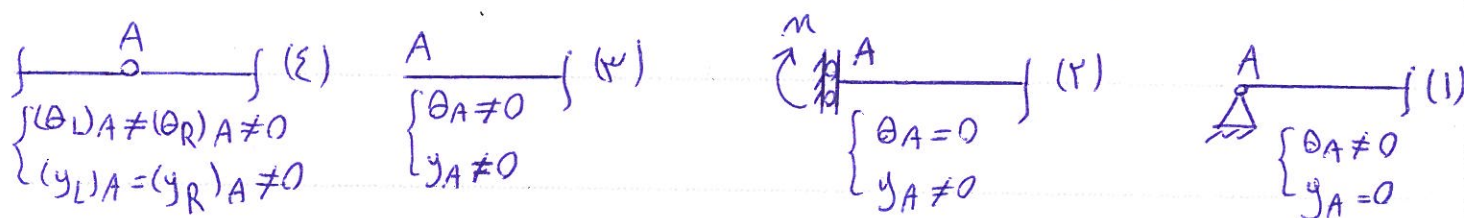
روش تیر مزدوج:

مقدمه: این روش معمولاً برای محاسبه فیزوئیب در تیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. قبل از شروع مفاهیم روش تیر مزدوج، به بررسی شرایط مرزی در دو گره شرایط مرزی استاتیکی و شرایط مرزی هندسی می‌پردازیم.

۱- شرایط مرزی استاتیکی: این شرایط مرزی بر روی مقادیر برشی و فیزی در محل اتصالات بین اعضا و تکیه‌گاه‌ها، سازه بحث می‌کند. چند نمونه از شرایط مرزی استاتیکی:

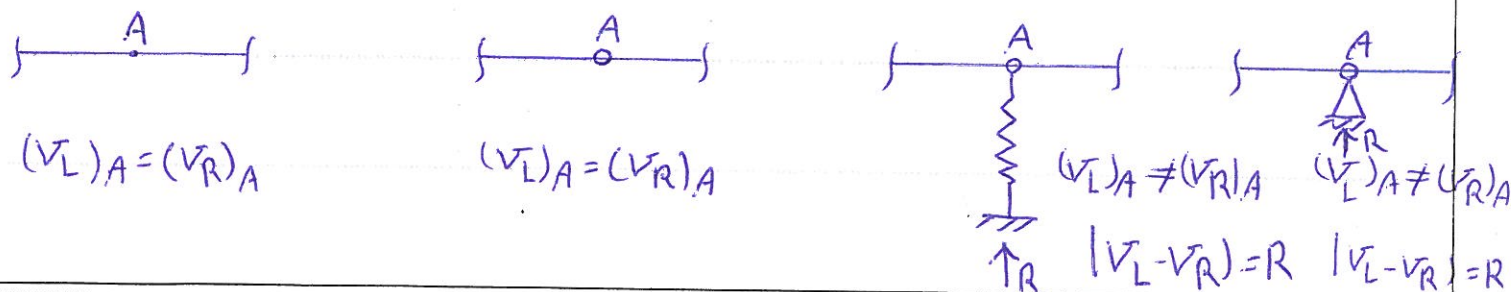


۲- شرایط مرزی هندسی: این شرایط مرزی بر روی مقادیر فیزی و فیزی در محل اتصالات اعضا و تکیه‌گاه‌ها، سازه بحث می‌کند. چند نمونه از شرایط مرزی هندسی:

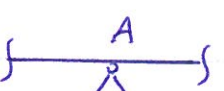


تذکره: در بررسی شرایط مرزی استاتیکی و هندسی به موارد زیر توجه شود:

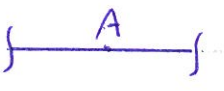
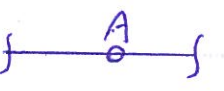
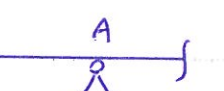
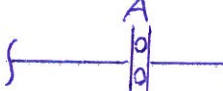
۱- در بررسی شرایط مرزی استاتیکی در یک نقطه میانی دلخواه از یک تیر، بررسی درست و نادرست آن برابر است، مگر آن که در آن نقطه، نیروی متمرکز اثر کرده باشد. در این حالت اختلاف بررسی درست و نادرست نقطه مورد نظر، برابر با مقدار بار متمرکز است.



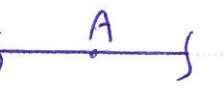
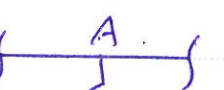
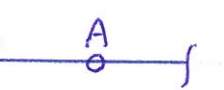
۲- در بررسی شرایط مرزی استاتیکی در یک نقطه میانی دلخواه از یک تیر، لنگر در سمت چپ و راست آن برابر است، مگر که در نقطه مورد نظر یک لنگر متمرکز اثر کرده باشد در این حالت، اختلاف لنگر در سمت چپ و راست نقطه مورد نظر، برابر لنگر متمرکز است.

			
$(M_L)_A = (M_R)_A = 0$	$(M_L)_A \neq (M_R)_A$	$(M_L)_A = (M_R)_A$	$(M_L)_A \neq (M_R)_A$
	$ M_L - M_R = M$		$(M_L)_A = 0, (M_R)_A = M$

۳- در بررسی شرایط مرزی هندسی در یک نقطه میانی دلخواه از یک تیر، سبب چپ و راست آن برابر است، مگر آن که در آن نقطه یک مفصل خسته داخلی موجود باشد.

			
$(\theta_L)_A = (\theta_R)_A$	$(\theta_L)_A \neq (\theta_R)_A$	$(\theta_L)_A = (\theta_R)_A$	$(\theta_L)_A = (\theta_R)_A$

۴- در بررسی شرایط مرزی هندسی در یک نقطه میانی دلخواه از یک تیر، سبب چپ و راست نقطه مورد نظر برابر است مگر آن که در آن نقطه یک مفصل برشی موجود باشد.

			
$(y_L)_A = (y_R)_A$	$(y_L)_A = (y_R)_A$	$(y_L)_A = (y_R)_A$	$(y_L)_A \neq (y_R)_A$

رسم تیر مزوج:

برای استفاده از روش تیر مزوج، ابتدا باید شکل تیر مزوج را رسم کرد. تیر مزوج، تیری فرضی است که دارای طول برابر با طول تیر اصلی بوده و شرایط مرزی استاتیکی در آن، برابر با شرایط مرزی هندسی در تیر اصلی بدست می آید.

ارتباط بین تیر اصلی و تیر مزدج مطابق جدول زیر است:

تیر اصلی	تیر مزدج
برش نقطه Δ در تیر مزدج (شرایط مرزی استاتیکی در تیر مزدج) $\equiv$ شیب نقطه Δ در تیر اصلی (شرایط مرزی هندسی در تیر اصلی)	
لنگر نقطه Δ در تیر مزدج (شرایط مرزی استاتیکی در تیر مزدج) $\equiv$ چرخش نقطه Δ در تیر اصلی (شرایط مرزی هندسی در تیر اصلی)	

برای درک بهتر جدول فوق، به عبارت های زیر دقت شود:

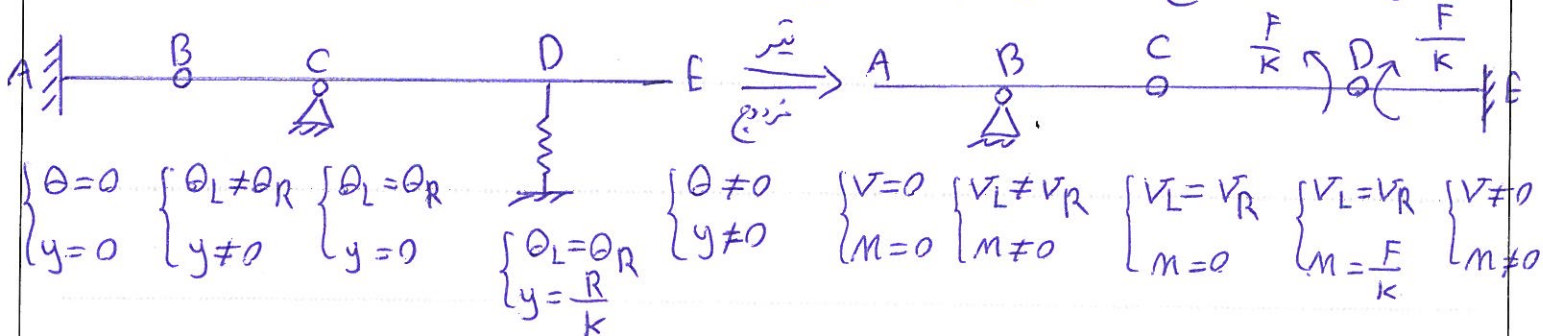
۱- اگر در نقطه Δ از تیر اصلی شیب ایجاد شود، در نقطه Δ روی تیر مزدج برشی خواهیم داشت.

۲- اگر در نقطه Δ در تیر اصلی چرخش ایجاد شود، در نقطه Δ روی تیر مزدج، لنگر خواهیم داشت.

۳- اگر شیب صاف و راست نقطه Δ در تیر اصلی یکسان باشد، در نقطه Δ از تیر مزدج، برشی صاف و راست یکسان خواهد بود.

۴- اگر چرخش صاف و راست نقطه Δ در تیر اصلی یکسان باشد، در نقطه Δ از تیر مزدج، لنگر صاف و راست یکسان خواهد بود.

مثال ۵: تیر مزدج شکل زیر را بدست آورید.



در جدول زیر، مرتب انواع اتصالات و تکیه گاه های رایج نشان داده شده است:

تیر اصلی

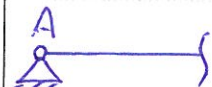
تیر فرعی



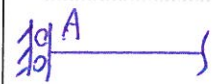
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



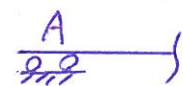
$$\begin{cases} \theta \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$



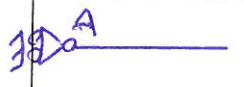
$$\begin{cases} \theta \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



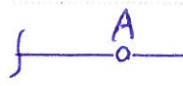
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$



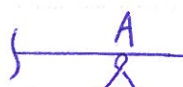
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$



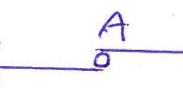
$$\begin{cases} \theta_L \neq \theta_R \\ y_L = y_R \neq 0 \end{cases}$$



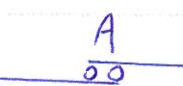
$$\begin{cases} \theta_L = \theta_R \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta_L \neq \theta_R \\ y = 0 \end{cases}$$



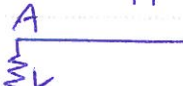
$$\begin{cases} \theta_L \neq \theta_R \\ y_L = y_R \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta_L = \theta_R \neq 0 \\ y_L = y_R \neq 0 \end{cases}$$



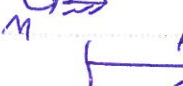
$$\begin{cases} \theta_L = \theta_R \neq 0 \\ y_L \neq y_R, |y_L - y_R| = \Delta s \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta \neq 0 \\ y = \frac{R}{k} \end{cases}$$



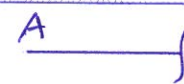
$$\begin{cases} \theta = \frac{M}{k} \\ y = 0 \end{cases}$$



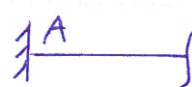
$$\begin{cases} \theta_L = \theta_R \\ y = \frac{R}{k} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta_L \neq \theta_R, |\theta_L - \theta_R| = \frac{M}{k} \\ y \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V \neq 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V \neq 0 \\ M = 0 \end{cases}$$



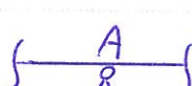
$$\begin{cases} V = 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$$



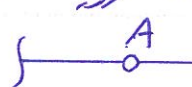
$$\begin{cases} V = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V \neq 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_L \neq V_R \\ M_L = M_R = 0 \end{cases}$$



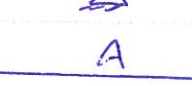
$$\begin{cases} V_L = V_R \\ M = 0 \end{cases}$$



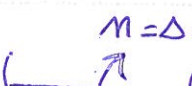
$$\begin{cases} V_L \neq V_R \\ M = 0 \end{cases}$$



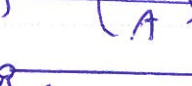
$$\begin{cases} V_L \neq V_R \\ M_L = M_R \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_L = V_R \neq 0 \\ M_L = M_R \neq 0 \end{cases}$$



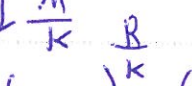
$$\begin{cases} V_L = V_R \neq 0 \\ M_L \neq M_R, |M_L - M_R| = \Delta s \end{cases}$$



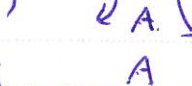
$$\begin{cases} V \neq 0 \\ M = \frac{R}{k} \end{cases}$$



$$\begin{cases} V = \frac{M}{k} \\ M = 0 \end{cases}$$

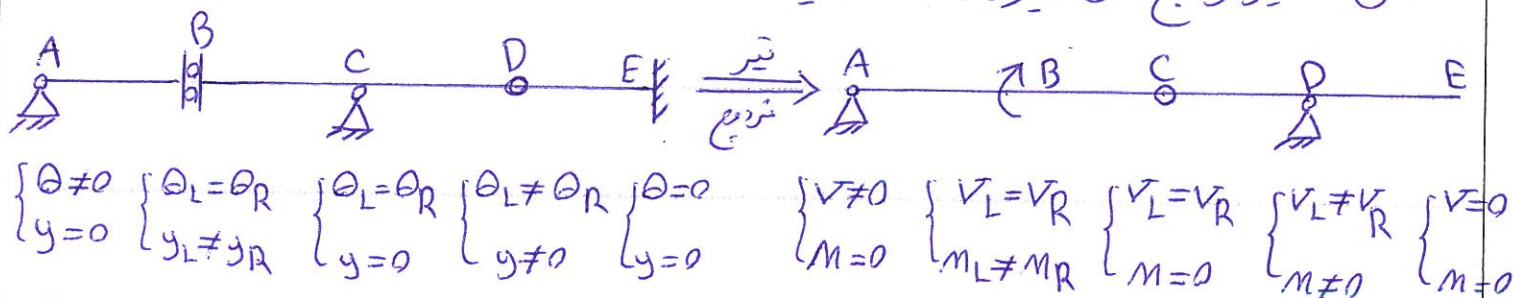


$$\begin{cases} V_L = V_R \\ M = \frac{R}{k} \end{cases}$$

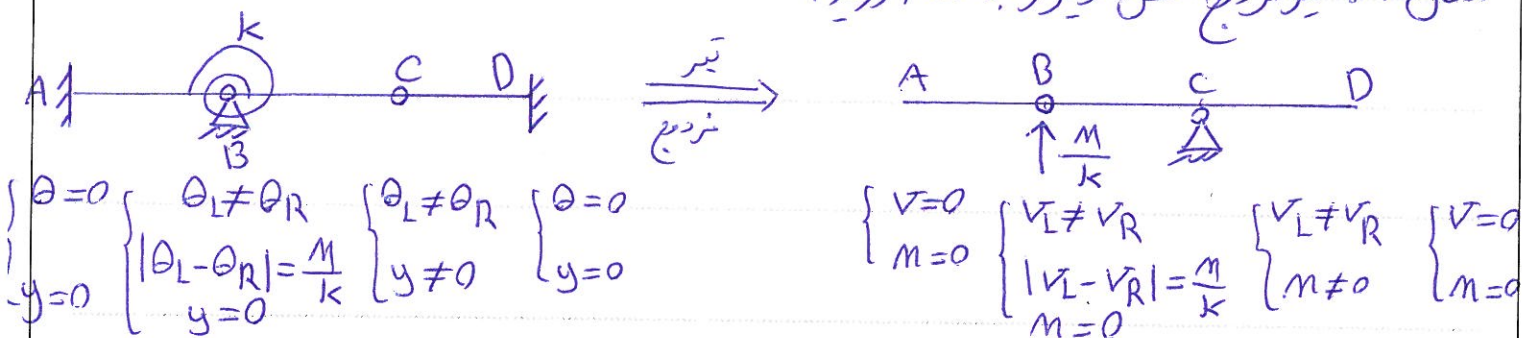


$$\begin{cases} V_L \neq V_R, |V_L - V_R| = \frac{M}{k} \\ M \neq 0 \end{cases}$$

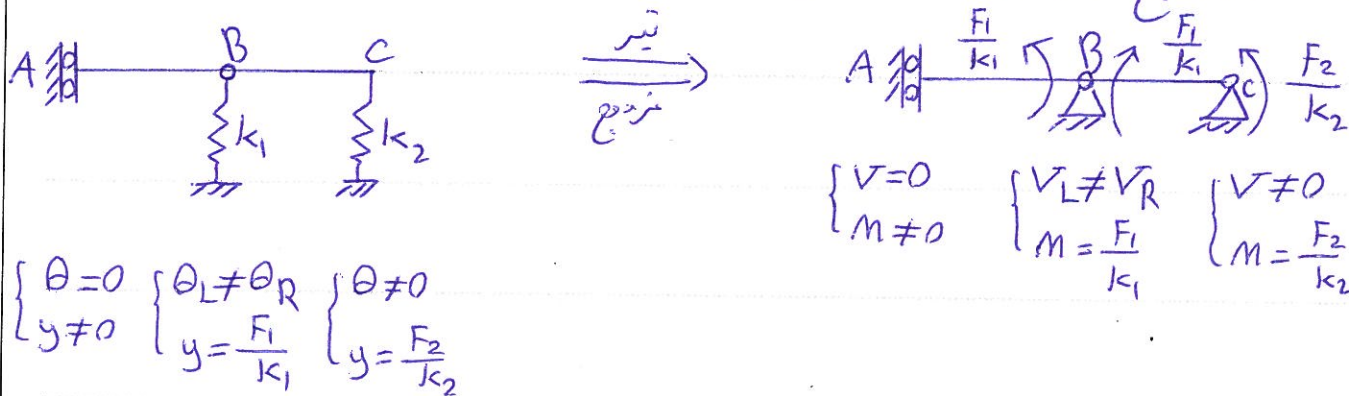
مسئله ۶: تیر مذکور شکل زیر را بدست آورید.



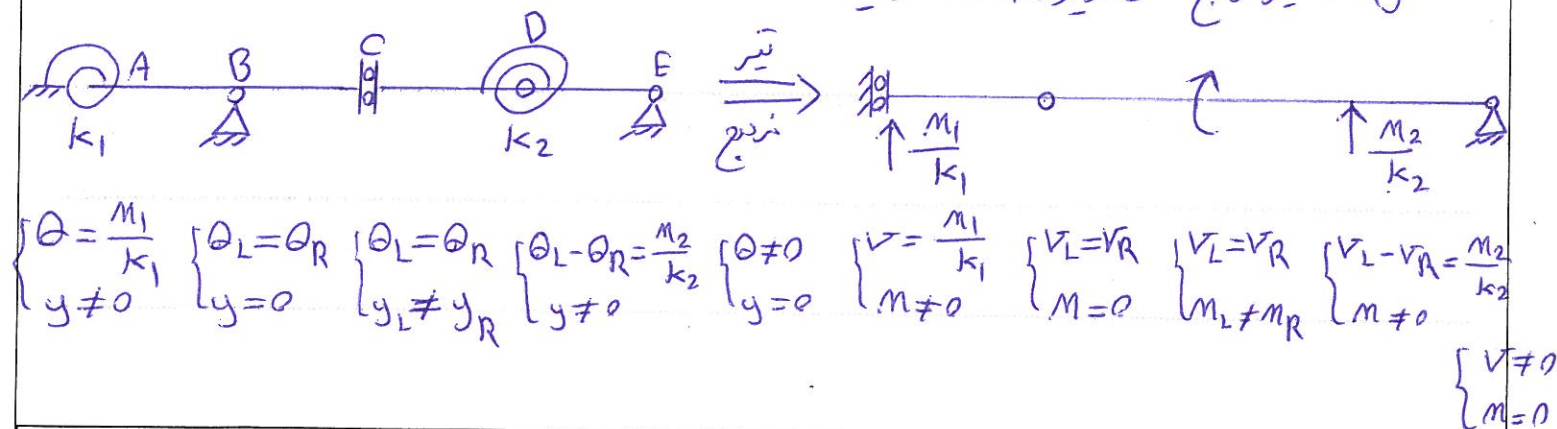
مسئله ۷: تیر مذکور شکل زیر را بدست آورید.



مسئله ۸: تیر مذکور شکل زیر را بدست آورید.



مسئله ۹: تیر مذکور شکل زیر را بدست آورید.

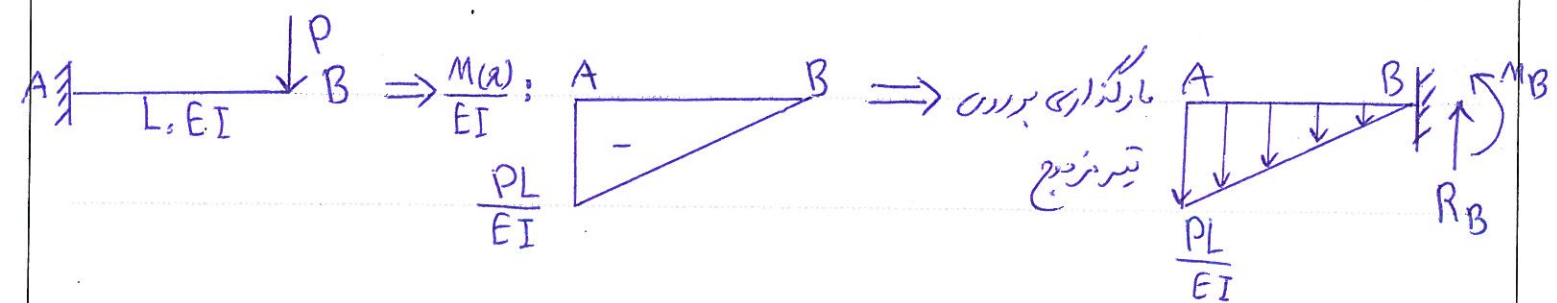


محاسبه تغییر شکل خاصی خنثی با استفاده از روشی تیر مزدوج:

برای محاسبه ضیب و یا خیز تیر در طول تیر اصلی دیاگرام $\frac{M}{EI}$ را رسم کرده و دیاگرام $\frac{M}{EI}$ مربوط به هر قسمت از تیر را مانند یک بارگذاری روی تیر مزدوج اعمال می‌کنیم به گونه‌ای که در محل خاصی که لنگر خنثی مثبت است جهت بارگذاری به سمت بالا و در محل خاصی که لنگر خنثی منفی است جهت بارگذاری به سمت پایین باشد. در نهایت در هر نقطه دلخواه از تیر اصلی ضیب و خیز به صورت زیر بدست می‌آید:

ضیب نقطه دلخواه از تیر اصلی	$\Leftarrow$	برش نقطه از تیر مزدوج
خیز نقطه دلخواه از تیر اصلی	$\Leftarrow$	لنگر نقطه از تیر مزدوج

مثال ۱۰: در تیر زیر، مقادیر خیز و ضیب را در انتهای آزاد تیر با روشی تیر مزدوج بدست آورید.

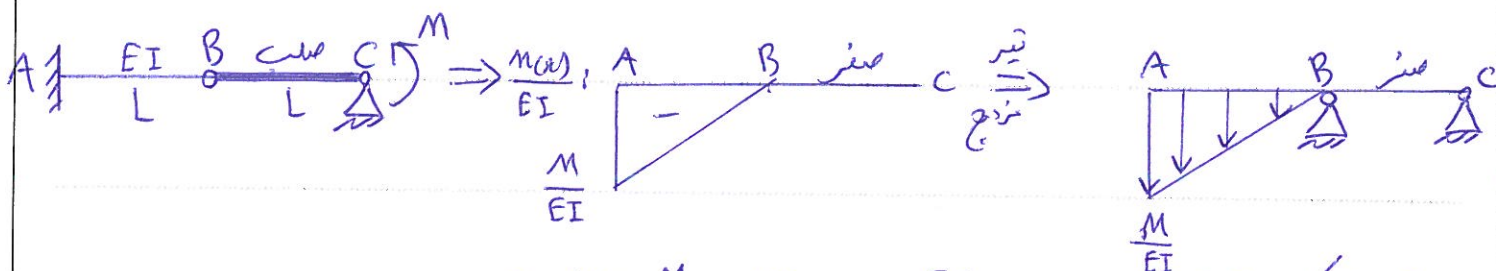


$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B + \frac{PL}{EI} \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow V_B = -\frac{PL^2}{2EI} \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B + \frac{PL}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow M_B = -\frac{PL^3}{3EI} \end{array} \right.$$

در انتهای B در خانات مثبت سکناسی است $\Rightarrow \theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$ در تیر مزدوج $\theta_B = V_B$ در تیر اصلی

خیز B به سمت پایین است $\Rightarrow y_B = -\frac{PL^3}{3EI}$ در تیر مزدوج $y_B = M_B$ در تیر اصلی

مثال ۱۱: در سازه زیر، اختلاف در طولین محصل ضرب B را بدست آورید.

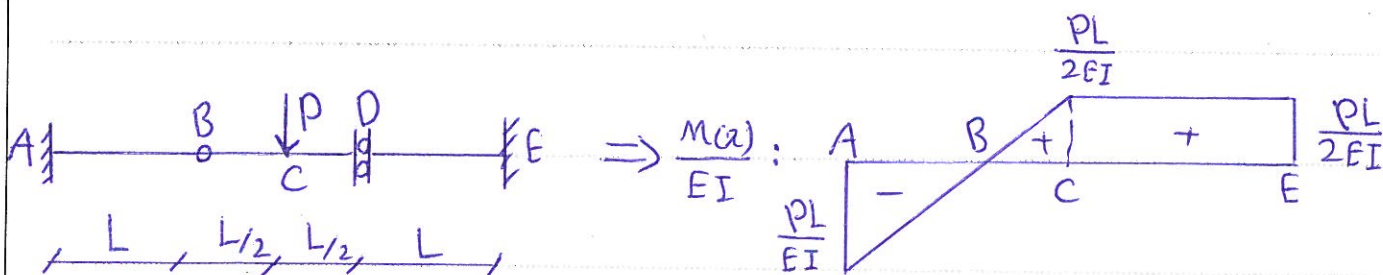


دقت شود که در قسمت صلب $EI = \infty$ بوده و مقدار $\frac{M}{EI}$ صفر است.

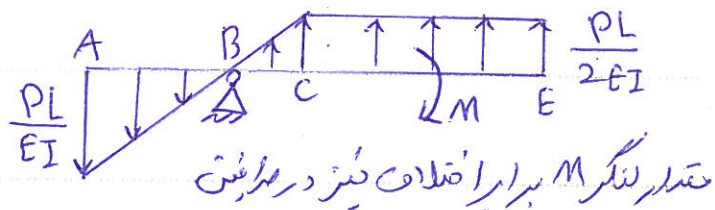
اختلاف سبب در طولین محصل B با اختلاف برشی در طولین B در تیر مربع برابر است. از طرفی اختلاف برشی در طولین B در تیر مربع، برابر عکس العمل کلیه گاه B است.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum M_c = 0 &\Rightarrow \Delta\theta_B \times L - \frac{M}{EI} \times \frac{L}{2} \times (L + \frac{2L}{3}) = 0 \\ \Rightarrow \Delta\theta_B &= \frac{5ML}{6EI} \end{aligned}$$

مثال ۱۲: در تیر زیر، اختلاف نیز در طولین محصل برشی D را بدست آورید.



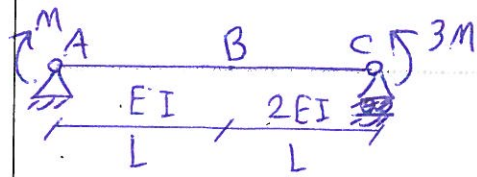
$\Rightarrow$ بارگذاری تیر مربع



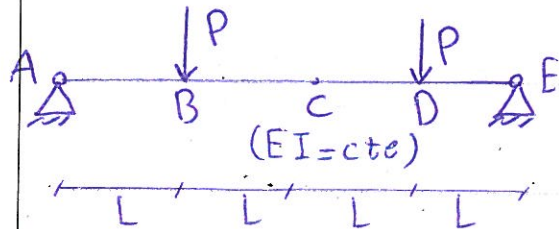
$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow M = \frac{PL}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2L}{3} + \frac{PL}{2EI} \times \frac{L}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} + \frac{PL}{2EI} \times \frac{3L}{2} \\ &\times (\frac{L}{2} + \frac{3L}{4}) \Rightarrow M = \Delta\theta_B = \frac{21PL^3}{16EI} \end{aligned}$$

تمرینات فصل دوم:

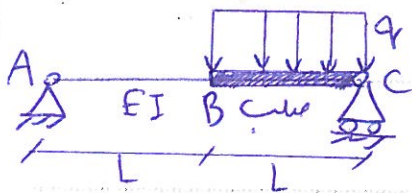
۱- اختلاف سب بین نقاط A و B در تیر مقابل مقدار است؟



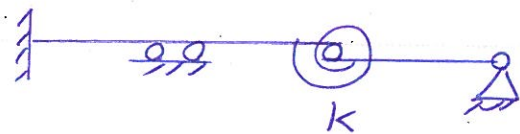
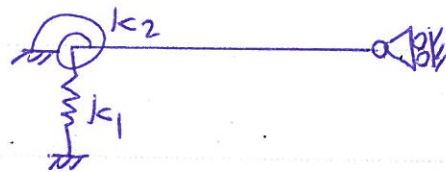
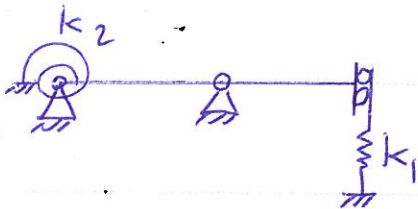
۲- در تیر شکل زیر، انحراف نقطه C از طاق تیر بین در A که است؟



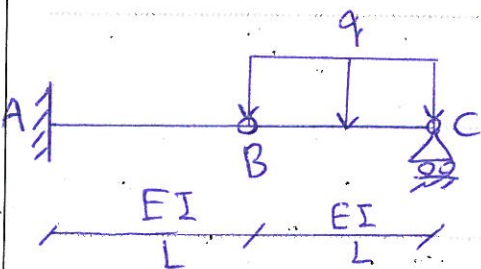
۳- در تیر شکل زیر، انحراف نقطه C از طاق تیر بین در A روی مستقیم تغییر شکل تیر مقدار است؟



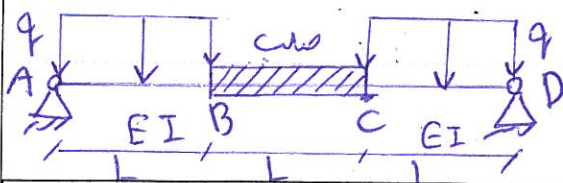
۴- تیر مزدوج شکل های زیر را رسم کنید.



۵- در سازه مقابل، اختلاف سب در مرکزین مفصل خمی مقدار است؟



۶- در شکل مقابل، سب تیر در نقطه A مقدار است؟



فصل سوم: روش های انرژی

روش های انرژی، روش هایی قدرتمند در محاسبه تغییر شکل سازه ها محسوب می شوند. و از جمله آزمون های به روش های کار مجازی و کاستلیانو و قضیه بتر-ماکول اشاره کرد. روش کار مجازی تأثیر عوامل بیتری را در محاسبه تغییر شکل در نظر گرفته و از روش کاستلیانو قدرتمندتر است.

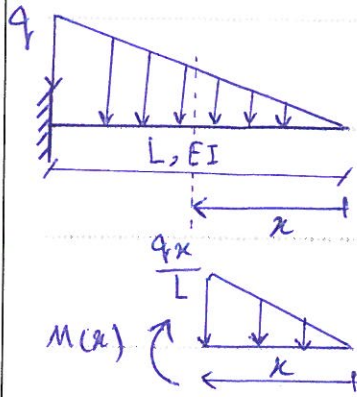
محاسبه انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه ها:

فرصت کسب سازه ای تحت اثر نیروهای خارجی قرار گرفته و در اثر این بارگذاری، اعضاء آن تغییر شکل می دهند. با این تغییر شکل نیروهای داخلی ایجاد شده در اعضاء کار انجام داده و سبب ذخیره شدن انرژی در سازه می شوند. کار انجام شده توسط نیروهای داخلی را کار داخلی یا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه می نامیم.

$$U = \underbrace{\int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA_s} dx}_{(2)} + \underbrace{\int_0^L \frac{N^2(x)}{2EA} dx}_{(3)} + \underbrace{\int_0^L \frac{T^2(x)}{2GJ} dx}_{(4)} + \underbrace{\sum \frac{F_s^2}{2k_\Delta}}_{(5)} + \underbrace{\sum \frac{m^2}{2k_\theta}}_{(6)}$$

- U: انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه
- (۱): انرژی کرنشی تحت اثر تگر خمشی داخلی
- (۲): انرژی کرنشی تحت اثر نیروی برشی داخلی
- (۳): انرژی کرنشی تحت اثر نیروی محوری داخلی
- (۴): انرژی کرنشی تحت اثر لنگر پیچشی داخلی
- (۵): انرژی کرنشی ذخیره شده در فنرهای انتقالی
- (۶): انرژی کرنشی ذخیره شده در فنرهای دورانی

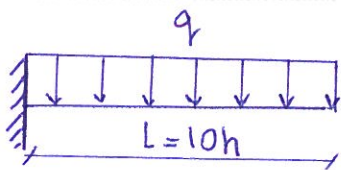
مسئله ۱: انرژی کرنش ذخیره شده ناشی از کرنش را در تیر مقابل محاسبه کنید.



$$\Rightarrow M(x) + \frac{qx}{L} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow M(x) = -\frac{qx^3}{6L}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^L \frac{\left(-\frac{qx^3}{6L}\right)^2}{2EI} dx = \frac{q^2 L^5}{504EI}$$

مسئله ۲: انرژی کرنش ذخیره شده ناشی از برش را در تیر مقابل محاسبه کنید.



$$\Rightarrow V(x) = qx$$

$$U = \int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA_s} dx = \int_0^L \frac{(qx)^2}{2GA_s} dx = \frac{q^2 L^3}{6GA_s}$$

A_s : مساحت موثر برش مقطع می باشد که برای ستون برابر $A_s = \frac{5}{8}A$

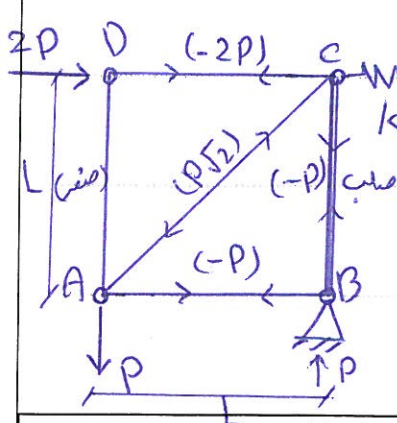
$$U = \frac{q^2 (10h)^3}{6G \times \frac{5}{8}A} = \frac{q^2 (10h)^3}{6G \times \frac{5}{8}(bh)} = \frac{10^3 q^2 h^3}{5Gbh} = 200 \frac{q^2 h^2}{Gb}$$

انرژی کرنش ذخیره شده در سازه های فرایین:

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} + \sum \frac{F_s^2}{2k_\Delta}$$

F : نیروی محوری داخلی در اعضا فرایین

F_s : نیروی داخلی فراتقالی



مسئله ۳: انرژی کرنش ذخیره شده در فرایین چین مقابل را بر حسب P و L و E و A محاسبه کنید.

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} + \frac{F_s^2}{2k_s} = \left[\frac{(-P)^2 L}{2AE} + 0 + 0 + \frac{(P\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} L}{2AE} + \frac{(-2P)^2 L}{2AE} \right] + \left[\frac{P^2}{2 \times \frac{2AE}{L}} \right] = \frac{P^2 L}{AE} \left[\frac{11}{2} + \sqrt{2} \right]$$

نکته: در سازه های که تحت اثر چندین بارگذاری از جنس نیرو یا لنگر قرار گرفته اند، می توان مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه را با استفاده از رابطه زیر محاسب کرد:

$$U = \pm \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \times P_i \Delta_i \pm \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \times M_i \theta_i$$

m : تعداد نیروی متمرکز

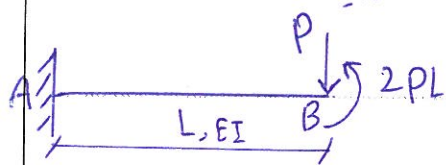
n : تعداد لنگر متمرکز

Δ_i : تغییر مکان نقطه اثر راستای نیروی P_i (ناشی از تمام بارهای اعمال شده بر سازه و نه فقط ناشی از نیروی P_i)

θ_i : دوران نقطه اثر در جهت لنگر M_i (ناشی از تمام بارهای اعمال شده بر سازه و نه فقط M_i)

در این رابطه، علامت مثبت برای زمانی است که نیرو یا لنگر با تغییر مکان متناظرشان هم جهت است و علامت منفی برای زمانی است که نیرو یا لنگر با تغییر مکان متناظرشان در خلاف جهت باشد.

مثال ۴: مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر مقابل ناشی از خشی را بدست آورید.



$$U = \pm \frac{1}{2} P \times \Delta_B \pm \frac{1}{2} \times 2PL \times \theta_B$$

$$+\Delta_B = -\frac{PL^3}{3EI} + \frac{2PL \times L^2}{2EI} = +\frac{2}{3} \frac{PL^3}{EI}$$

$$+\theta_B = +\frac{2PL \times L}{EI} - \frac{PL^2}{2EI} = +\frac{3}{2} \frac{PL^2}{EI}$$

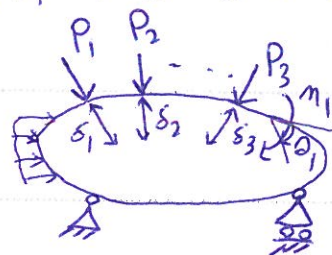
$$U = -\frac{1}{2} \times P \times \left(\frac{2PL^3}{3EI} \right) + \frac{1}{2} \times 2PL \times \left(\frac{3PL^2}{2EI} \right) = \frac{7P^2L^3}{6EI}$$

نیروی P و Δ_B با یکدیگر در خلاف جهت بوده و علامت آن در رابطه منفی بوده و لنگر $2PL$ و θ_B

با یکدیگر هم جهت هستند و علامت آن مثبت است.

فصل اول: کلیات

اگر انرژی ذخیره شده در یک سازه بارهای نقطه‌ای یا غیر نقطه‌ای (در عیاب تغییر دما و نیست‌های تکیه‌گاه) به حسب تغییر مکان و یا دوران‌های مستقل گاهی در آن سازه نوشته شود، مشتق جزئی تابع انرژی کرنشی نسبت به تغییر مکان از سازه در یک راستا، برابر مقدار نیروی مؤثر بر سازه در آن نقطه و در همان راستا باشد. همچنین مشتق جزئی تابع انرژی نسبت به دوران در هر نقطه از سازه، برابر مقدار



لنگر مؤثر بر سازه در همان نقطه خواهد بود. $U = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i \end{cases}$$

فصل دوم: کلیات

در یک سازه بارهای الاستیک خطی، در عیاب تغییر دما و نیست‌های تکیه‌گاهی، اگر انرژی کرنشی ذخیره شده را به حسب نیروهای مؤثر گاهی و یا لنگرهای متمرکز گاهی بر آن سازه در اختیار داشته باشیم، مشتق جزئی تابع انرژی کرنشی نسبت به هر یک از نیروهای مؤثر وارد بر سازه، برابر تغییر مکان در امتداد آن نیرو در سازه خواهد بود. همچنین مشتق جزئی تابع انرژی نسبت به هر لنگر متمرکز وارد بر سازه، برابر دوران مشافه با آن لنگر، در سازه اصلی باشد.

$$U = f(P_1, P_2, \dots, M_1, M_2, \dots) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i \\ \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i \end{cases}$$

سوال ۵: قضایای اول و دوم کاستیلانو را برای قشر قابل بررسی کنید.



$$\Delta_A = \frac{P}{k} \Rightarrow P = k \Delta_A$$

انرژی کرنی: $U = \pm \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} P_i \Delta_i \pm \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \theta_i$ برای قشر قابل $\Rightarrow U = \frac{1}{2} P \Delta$

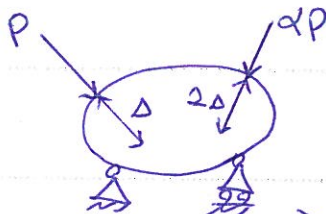
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} P \times \Delta_A = \frac{1}{2} P \times \frac{P}{k} = \frac{P^2}{2k}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} P \times \Delta_A = \frac{1}{2} \times (k \Delta_A) \times \Delta_A = \frac{1}{2} k \Delta_A^2$$

قضیه اول کاستیلانو: $U = \frac{1}{2} k \Delta_A^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta_A} = 2 \times \frac{1}{2} k \Delta_A = k \Delta_A = P$

قضیه دوم کاستیلانو: $U = \frac{P^2}{2k} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2P}{2k} = \frac{P}{k} = \Delta_A$

سوال ۶: در سازه الاستیک خطی قابل، حاصل $\frac{\partial U}{\partial P}$ را بدست آورید. ($U = f(P)$)



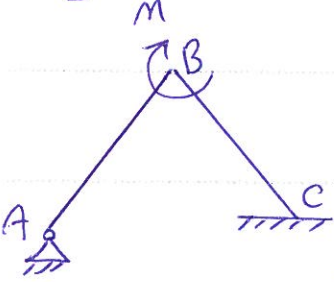
$$P_1 = P$$

$$P_2 = \alpha P$$

$$\Rightarrow U = f(P_1, P_2) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial P_1} \times \frac{\partial P_1}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial P_2} \times \frac{\partial P_2}{\partial P}$$

قضیه دوم کاستیلانو: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial P_1} = \Delta \\ \frac{\partial U}{\partial P_2} = 2\Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial P} = 1 \\ \frac{\partial P_2}{\partial P} = \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \Delta \times 1 + 2\Delta \times \alpha = \Delta(1 + 2\alpha)$

سوال ۷: در سازه قابل اگر انرژی کرنی ذخیره شده در سازه برابر $U = \frac{2EI}{L} (2\theta_B^2 + \theta_A^2 + \theta_B \theta_A)$ باشد، مقدار θ_B چقدر است؟



قضیه اول کاستیلانو: $\frac{\partial U}{\partial \theta_A} = A$ در نقطه $= 0 \Rightarrow 2\theta_A + \theta_B = 0$

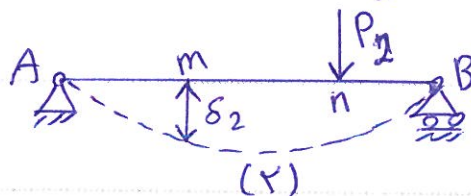
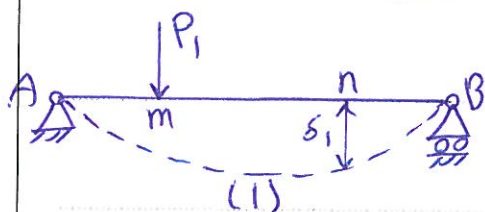
$$\Rightarrow \theta_A = -\frac{\theta_B}{2} \quad (1)$$

$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = b$ در نقطه $= M \Rightarrow \frac{2EI}{L} (4\theta_B + \theta_A) = M \quad (2)$

(2), (1) $\Rightarrow \frac{2EI}{L} (4\theta_B - \frac{\theta_B}{2}) = M \Rightarrow \theta_B = \frac{ML}{7EI}$

قضیه بتن - ماکول: (قضیه تقابل کار و انرژی)

فرض کنید یک سازه باردار الاستیک، فاقد نشت های کلیه گاهی و تغییر دما، تحت اثر بارگذاری حالت (۱) قرار گرفته و تغییر مکان های حالت (۱) در آن پدید آید، در ادامه بار دیگر همان سازه را تحت اثر بارگذاری حالت (۲) قرار داده و تغییر مکان های حالت (۲) برای آن ایجاد شده است.



$$P_1 \delta_2 = P_2 \delta_1$$

مطابق قضیه بتن - ماکول رابطه زیر برقرار خواهد بود:

کار انجام شده توسط نیروهای حالت (۲) تحت تغییر مکان های حالت (۱) = کار انجام شده توسط نیروهای حالت (۱) تحت تغییر مکان های حالت (۲)
نکته: هنگامی که نیرو و جابه جایی متناظر با آن (یا لنگر و دوران متناظر با آن) هم جهت باشند، کار انجام شده با علامت مثبت و هنگامی که نیرو و جابه جایی متناظر با آن متعلق الحجت باشند، منفی خواهد بود.

مثال ۸: با استفاده از قضیه بتن - ماکول تغییر مکان ΔB را بدست آورید. (EI) ثابت

$$\Rightarrow -P \times \Delta B_2 = -M \theta_{c1}$$

$$\Rightarrow -1 \times \Delta B_2 = -2 \times 0.01$$

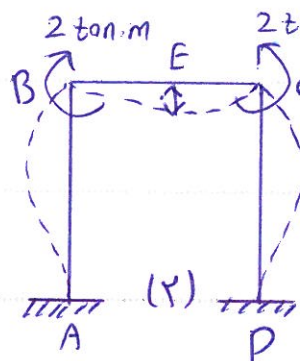
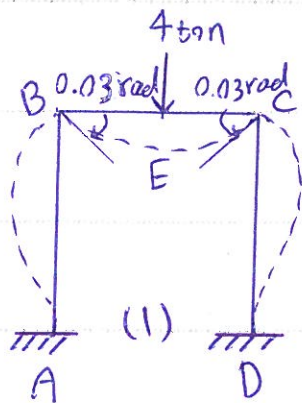
$$\Rightarrow \Delta B_2 = 0.02 \text{ m}$$

نکته: اگر بزرگ سازه چند نیرو و یا لنگر وارد شود، باید کار همه نیرو و لنگر ها محاسبه شود:

$$\sum_{i=1}^n P_i \Delta_{i2} + \sum_{i=1}^n M_i \theta_{i2} = \sum_{j=1}^n P_j \Delta_{j1} + \sum_{j=1}^n M_j \theta_{j1}$$

- P_i : نیروی متمرکز وارد بر سازه در حالت (۱) P_j : نیروی متمرکز وارد بر سازه در حالت (۲)
 Δ_{i2} : تغییر مکان در راستای نیروی P_i در حالت (۲) Δ_{j1} : تغییر مکان در راستای نیروی P_j در حالت (۱)
 θ_{i2} : دوران مشافیه با لنگر M_i در حالت (۲) θ_{j1} : دوران مشافیه با لنگر M_j در حالت (۱)
 M_i : لنگری وارد بر سازه در حالت (۱) M_j : لنگری وارد بر سازه در حالت (۲)

✓ مثال ۹: در سازه (۲) جابه جایی قائم تخته E مشافیه است! (EI ثابت)

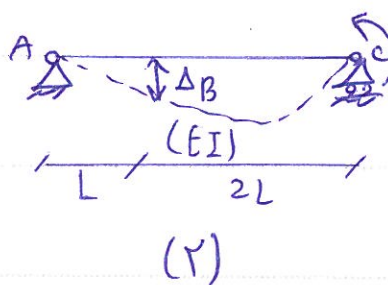
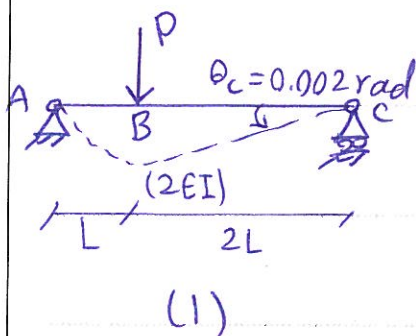


قصد بتن-ماکول: $P\Delta_{E2} = M_B\theta_{B1} + M_C\theta_{C1}$

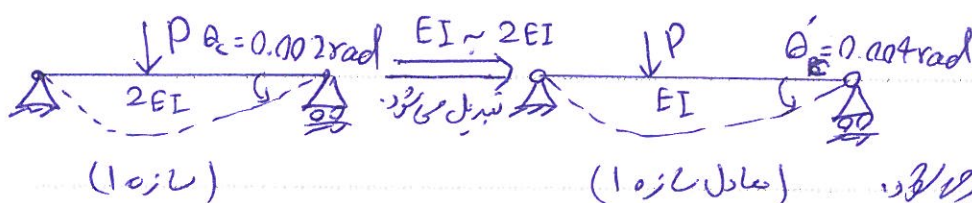
$$\Rightarrow 4 \times \Delta_{E2} = 2 \times 0.03 + 2 \times 0.03$$

$$\Rightarrow \Delta_{E2} = 3 \text{ cm}$$

مثال ۱۰: در سازه (۲) تغییر مکان تخته B را بدست آورید.



قصد بتن-ماکول زمانی صحیح است که
دورانه کاتالیزور باشد بنابراین در سازه



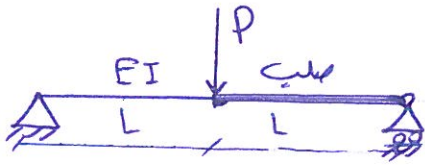
(۱) تبدیل انجام می دهیم با نصف

شدن صلبیت خمی، تغییر شکل دوباره شود. (معادل سازه ۱)

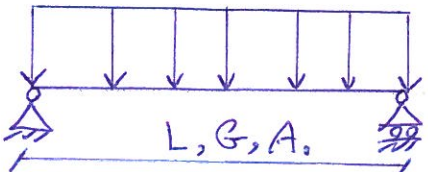
قصد بتن-ماکول زمانی صحیح است: $P \times \Delta_{B2} = M \times \theta_{C1} \Rightarrow P \times \Delta_{B2} = PL \times 0.004$
 $\Rightarrow \Delta_{B2} = 0.004L$

تمرینات فصل سوم:

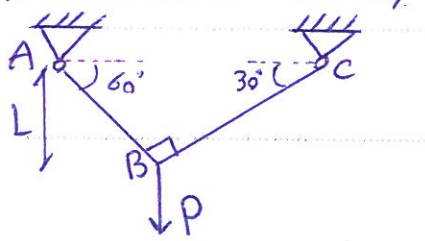
۱- در تیر مقابل، مقدار انرژی ذخیره شده ناشی از خمشی را بدست آورید.



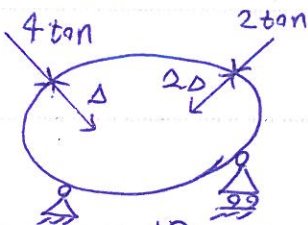
۲- انرژی کرنشی ذخیره شده ناشی از برش، در تیر مقابل چقدر است؟



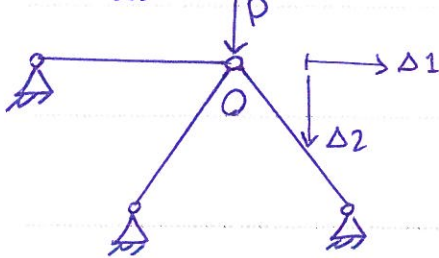
۳- انرژی کرنشی ذخیره شده در فرایچه مقابل را بدست آورید. (AE یکسان)



۴- در سازه الاستیک خطی مقابل $\frac{\partial U}{\partial \Delta}$ را بدست آورید. ($U = f(\Delta)$)

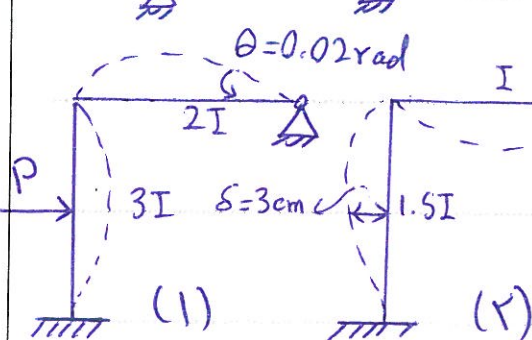


۵- در فرایچه مقابل انرژی $U = \frac{AE}{L}(a\Delta_1^2 + b\Delta_1\Delta_2 + c\Delta_2^2)$ و $\Delta_2 = 4\Delta_1$ باشد، قدر مطلق نسبت $\frac{b}{a}$ چقدر است؟

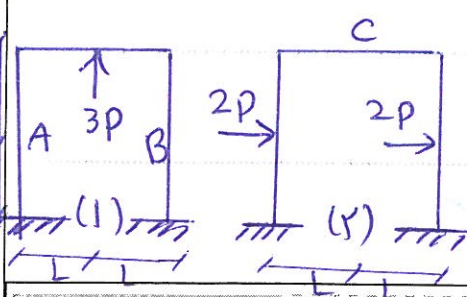


$m = 2 \text{ ton.m}$

۶- با توجه به سازه های (۱) و (۲) مقدار P را بدست آورید.



۷- با توجه به سازه های (۱) و (۲) جابجایی قائم نقطه C را بدست آورید.



(EI ثابت است)

فصل چهارم: روش کار مجازی

بخش اول: روش کار مجازی در فریاد

روش کار مجازی، عمومی ترین و کامل ترین روش برای بدست آوردن تغییر شکل (دوران و تغییر مکان) در یک سازه می باشد. برای محاسبه تغییر مکان نقاط مختلف یک فریاد تحت بارگذاری ایستایی وارده بر آن، هنگامی که عوامل مانند نسبت، تغییر دما، در اعضای و خطای ساخت اعضا نیز در سازه وجود دارد، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\Delta_i + w_R = \sum \frac{F \bar{F} L}{AE} + \sum \bar{F} \alpha L \Delta T + \sum \bar{F} \delta + \sum \frac{R \bar{R}}{k_\Delta}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶)

(۴): اثر تغییر دما در اعضا

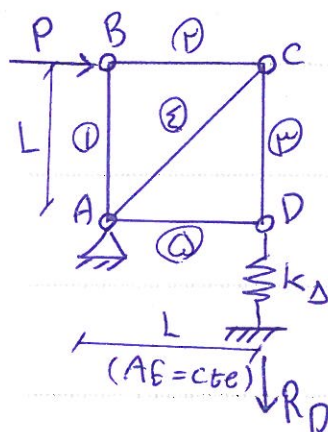
(۱): تغییر مکان در نقطه دلخواه

(۵): اثر خطای ساخت در جین و انتقال اعضا فریاد

(۲): نسبت تکثیر گاه

(۶): اثر وجود قشری انتقالی داخلی یا خارجی در فریاد

(۳): اثر نیروی مجری در اعضا



مثال ۱: در فریاد قابل تغییر مکان افقی نقطه C را بدست آورید.

گام ۱: در این مرحله، فریاد را تحلیل کرده و نیروی داخلی در کلیه اعضا فریاد (F)

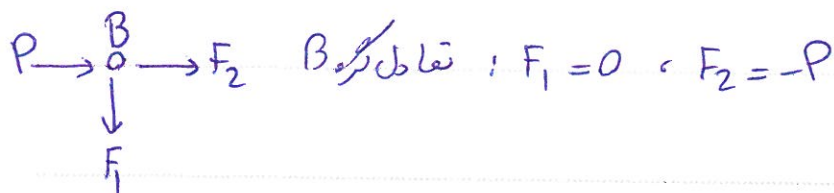
و قشر (R) را محاسبه می کنیم. دقت شود در رابطه کار مجازی، نیروی اعضا و قشری

نسبتاً با علامت مثبتی و تغییرات مثبت در روابط وارد می شوند.

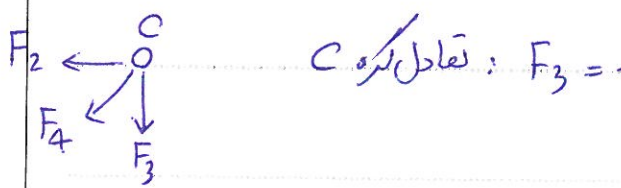
نیروی قشری

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -R_D \times L - P \times L = 0 \Rightarrow R_D = -P$$

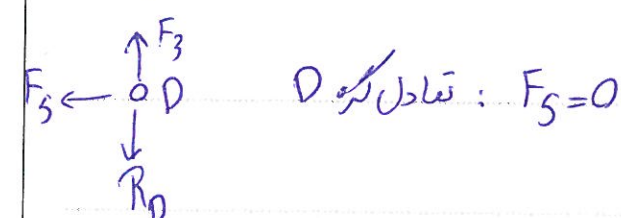
نوبه شود که در رسم تریس به آزادگره های
فریاد جهت نوشتن معادلات تعادل، نیروی قتر



وجهه اعطاء و قتر را در ابتدا بصورت
کشی نشان داده و در صورت منفی

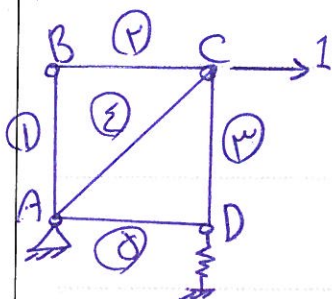


به دست آید. نیروی عضو یا قتر، نیروی آن بصورت
ضاری می باشد.



$$\text{نتیجه تحلیل سازه اصلی: } \begin{cases} F_1 = 0, F_2 = -P, F_3 = -P \\ F_4 = +\sqrt{2}P, F_5 = 0, R = -P \end{cases}$$

گام ۲: یک بار واحد در نقطه C در امتداد محور افقی بدون هیچ گونه بارگذاری وارد کرده و سازه را مجدداً تحلیل می کنیم.



$$\text{نتیجه تحلیل سازه تحت بار واحد: } \begin{cases} \bar{F}_1 = 0, \bar{F}_2 = 0, \bar{F}_3 = -1 \\ \bar{F}_4 = +\sqrt{2}, \bar{F}_5 = 0, \bar{R} = -1 \end{cases}$$

گام ۳: با توجه به عدم حضور عوامل نامند نسبت، تغییر دما و خطای سانت را به کار مجازی بصورت زیر

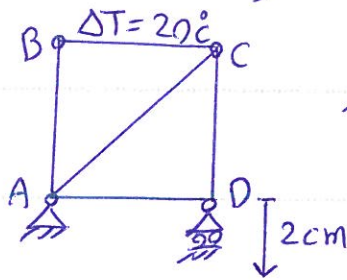
$$\Delta C_x = \sum \frac{F \bar{F} L}{AE} + \sum \frac{R \bar{R}}{k_{\Delta}} \quad \text{ساده می شود:}$$

$$\Delta C_x = \left[\frac{F_1 \bar{F}_1 L_1}{AE} + \frac{F_2 \bar{F}_2 L_2}{AE} + \frac{F_3 \bar{F}_3 L_3}{AE} + \frac{F_4 \bar{F}_4 L_4}{AE} + \frac{F_5 \bar{F}_5 L_5}{AE} \right] + \frac{R \bar{R}}{k_{\Delta}}$$

$$\Delta C_x = \left[0 + 0 + \frac{(-P)(-1) \times L}{AE} + \frac{\sqrt{2}P \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}L}{AE} + 0 \right] + \frac{(-P)(-1)}{k_{\Delta}}$$

$$\Delta C_x = \frac{PL}{AE} (1 + 2\sqrt{2}) + \frac{P}{k_{\Delta}}$$

نکته: در فریادنی مین، عوامل غیر مستقیم مانند نشست، تغییر دما و ضرایب سختی هیچ گونه نیروی داخلی و عکس العمل تکیه گاهی در سازه ایجاد نکرده ولی باعث ایجاد تغییر مکان در نقاط مختلف سازه می شود.



نمودار مثال در فریادنی مین زیر اگر تکیه گاه سمت راست 2 cm نشست کرده و

دما در عضو BC، 20 درجه سانتی گراد افزایش یابد، در هیچ یک از اعضا

$$F_{AB} = F_{BC} = F_{CD} = F_{AD} = F_{AC} = 0$$

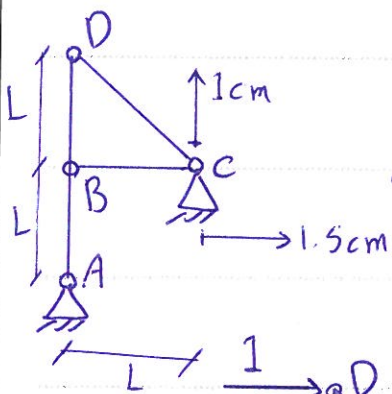
سازه، نیرویی ایجاد نمی شود؛

مثال ۲: در فریادنی زیر، تحت نشست در تکیه گاهی، تغییر مکان افقی نقطه D را بدست آورید.

چون فریادنی است، تحت اثر نشست در تکیه گاهی ایجاد شده در سازه،

نیرویی در اعضا ایجاد نمی شود ($F=0$). برای یافتن ΔD_x ، یک بار واحد افقی

در نقطه D به سازه وارد کرده و عکس العمل در تکیه گاه C را بدست می آوریم.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1 - \bar{C}_x = 0 \Rightarrow \bar{C}_x = 1$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 1 \times L - \bar{C}_y \times L = 0 \Rightarrow \bar{C}_y = 1$$



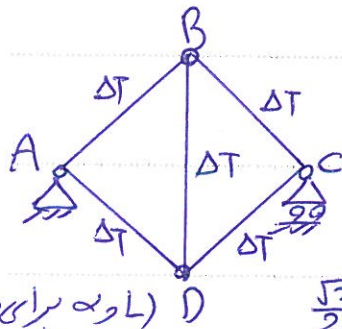
از این کار مجاز نیست علت عدم وجود نیروی خارجی، تغییر دما و ضرایب سختی نیست زیرا سازه را در نظر می گیریم؛

$$\Delta D_x + w_R = 0 \Rightarrow \Delta D_x + [\bar{C}_y \times 1 - \bar{C}_x \times 1.5] = 0 \Rightarrow \Delta D_x + [1 \times 1 - 1 \times 1.5] = 0$$

$$\Rightarrow \Delta D_x - 0.5 = 0 \Rightarrow \Delta D_x = 0.5 \text{ cm}$$

علت در خفاست جهت بودن $\bar{C}_x$ و 1.5

مثال ۳: تحت افزایش دمای ΔT در تمامی اعضای فرامی مقابل، تغییر مکان افقی نقطه C را بدست آورید.



این فرایند نیز همین است و با افزایش دما، نیروی داخلی در اعضا ایجاد نمی شود.

برای محاسبه Δ_{Cx} ، یک بار واحد افقی در این نقطه وارد می کنیم:

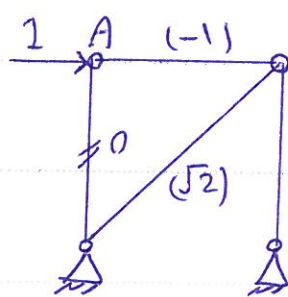
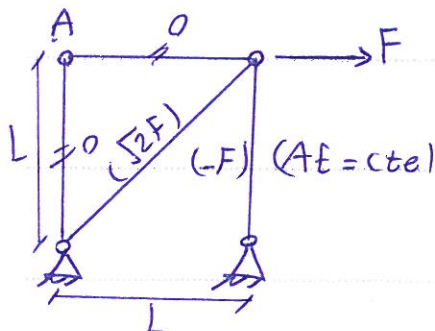
$$\bar{F}_{AB} = \bar{F}_{BC} = \bar{F}_{CD} = \bar{F}_{AD} = +\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \bar{F}_{BD} = -1$$

رابطه گاجازی بصورت زیر ساده می شود:

$$\Delta_D = \sum \bar{F} \alpha L \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta_D = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \alpha L \Delta T + (-1) \times \alpha (\sqrt{2} L) \Delta T \Rightarrow \Delta_D = \sqrt{2} \alpha L \Delta T$$

مثال ۴: در فرامی مقابل اگر دمای محیط به اندازه T گرم شود، تغییر مکان افقی نقطه A را بدست آورید.



برای محاسبه تغییر مکان افقی نقطه A، یک بار واحد

افقی در این نقطه قرار داده و سازه مجازی را تحلیل

می کنیم.

(سازه اصلی)

(سازه مجازی)

$$\Delta_A = \sum \frac{F \bar{F} L}{AE} + \sum \bar{F} \alpha L \Delta T = \left[\frac{\sqrt{2} F \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} L}{AE} + \frac{(-F) \times (-1) \times L}{AE} \right] + \left[\sqrt{2} \times \alpha \times (\sqrt{2} L) \times T + (-1) \times \alpha \times L \times T \times 2 \right] = (1 + 2\sqrt{2}) \frac{FL}{AE}$$

مثال ۵: اگر عضو BD در اتبای فرامی ساخت به اندازه δ بلندتر ساخته شده باشد،

میله AD چه قدر خطای ساخت داشته باشد تا جابه جایی قائم B برابر صفر شود؟

برای حل، یک بار واحد قائم را در B قرار داده و نیروی داخلی اعضای AD و BD را محاسبه می کنیم.

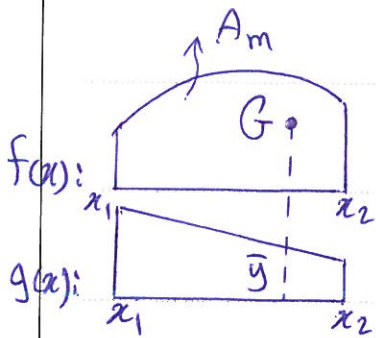
$$\Delta_D = \sum \bar{F} \delta = 1 + \delta + \left(-\frac{5}{6}\right) (\delta_{AD}) = 0$$

$$\Rightarrow \delta_{AD} = 1.2 \delta$$

مدرس: امید رسولی

بخش دوم: روش کار مجازی در تیر و ورقاب های معین

رشی فصل: محاسبه انتگرال با استفاده از روش تریبی مور



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) dx = A_m \times \bar{y}$$

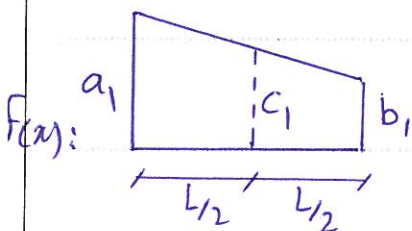
A_m : مساحت زیر نمودار $f(x)$

G : مرکز سطح نمودار $f(x)$

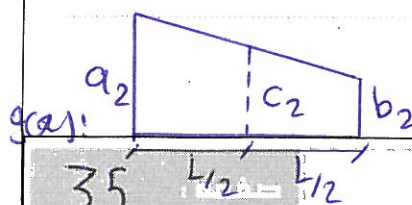
$\bar{y}$: مقدار $g(x)$ در نقطه نظیر G

۱		$A_m = a \times L$ $\bar{y} = b$	انتگرال گیری مستطیل در مستطیل: $\int f(x) g(x) dx = A_m \times \bar{y} = (a \times L) \times b = a b L$
۲		$A_m = a \times L$ $\bar{y} = \frac{b}{2}$	انتگرال گیری مستطیل در مثلث: $\int f(x) g(x) dx = A_m \times \bar{y} = a \times L \times \frac{b}{2} = \frac{a b L}{2}$
۳		$A_m = \frac{a \times L}{2}$ $\bar{y} = \frac{2b}{3}$	انتگرال گیری مثلث در مثلث با قاعده ای زیر هم: $\int f(x) g(x) dx = A_m \times \bar{y} = \frac{a L}{2} \times \frac{2b}{3} = \frac{a b L}{3}$
۴		$A_m = \frac{a \times L}{2}$ $\bar{y} = \frac{b}{3}$	انتگرال گیری مثلث در مثلث با قاعده ای غیر زیر هم: $\int f(x) g(x) dx = A_m \times \bar{y} = \frac{a \times L}{2} \times \frac{b}{3} = \frac{a b L}{6}$

نکته: انتگرال گیری حامل ضرب دو تابع ذوزنقه شکل بصورت زیر است:



$$\int f(x) g(x) dx = \frac{L}{6} \times [a_1 a_2 + 4 c_1 c_2 + b_1 b_2]$$



برای محاسبه تغییر مکان (یا دوران) نقطه ای دلخواه از یک تیر یا قاب تحت بارگذاری های وارده بر سازه به همراه عوامل مانند نسبت تکیه گاهی، تغییر دمای اعضا، گرادیان حرارتی، خطای ساخت و ... از رابطه کل زیر استفاده می شود: (۷) (۶) (۵) (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\Delta_i + w_R = \int \frac{m\bar{m}}{EI} dx + \int \frac{V\bar{V}}{GA_s} dx + \int \frac{N\bar{N}}{AE} dx + \int \frac{T\bar{T}}{GJ} dx + \int \bar{N} \alpha \Delta T dx$$

$$+ \int \bar{m} \frac{\alpha}{h} (T_b - T_t) dx + \sum \bar{N} \delta + \sum \frac{R\bar{R}}{k_\Delta} + \sum \frac{m\bar{m}}{k_\theta}$$

(۸) (۹) (۱۰) (۱۱)

(۱۱): تغییر مکان در نقطه دلخواه

(۷): اثر تغییر دمای اعضا

(۲): اثر نسبت تکیه گاه

(۸): اثر گرادیان حرارتی در اعضا

(۳): اثر تغییر شکل های خمشی

(۹): اثر خطای ساخت اعضا در هنگام مونتاژ سازه

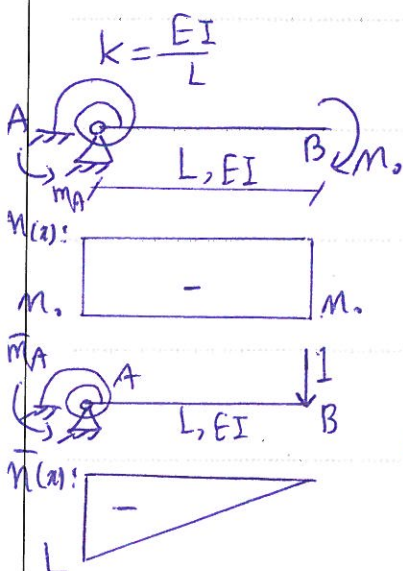
(۴): اثر تغییر شکل های برشی

(۱۰): اثر فنر های انتقالی

(۵): اثر تغییر شکل های محوری

(۱۱): اثر فنر های دورانی

(۶): اثر تغییر شکل های پیچی



مثال ۴: در تیر مقابل، تغییر مکان قائم نقطه B را محاسبه کنید.

$$m_A = m_B$$

گام ۱: تیر را تحلیل کرده و دیاگرام لنگر خشی را ترسیم می کنیم:

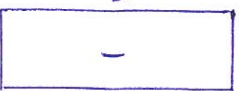
گام ۲: یک بار واحد قائم روی تیر فاقد بارگذاری (سازه مجازی) در نقطه B اعمال کرده

$$\bar{m}_A = L$$

و دیاگرام لنگر خشی را ترسیم می کنیم.

گام ۳: با استفاده از رابطه کار مجازی، ΔB_y را بدست می آوریم:

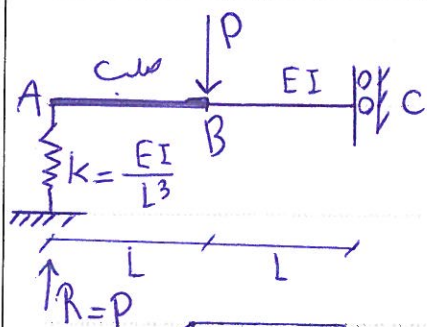
$$\Delta B_y = \int \frac{m \bar{m}}{EI} dx + \frac{m \bar{m}}{k_\theta}$$

$M(x)$: M_0  M_0

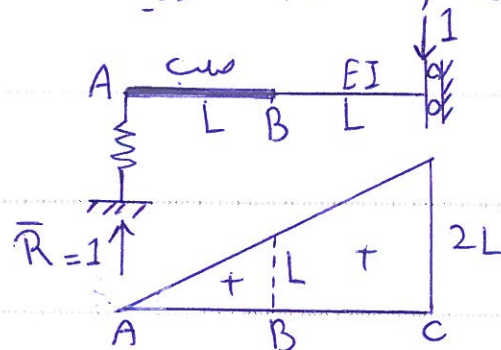
$\bar{m}(x)$ 

روش تریس مور: $\int \frac{m \bar{m}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int m \bar{m} dx = \frac{1}{EI} \times \frac{a b L}{2}$
 $= \frac{1}{EI} \times \frac{(-M_0) \times (-L) \times L}{2} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$

$$\Delta B_y = \int \frac{m \bar{m}}{EI} dx + \frac{m \bar{m}}{k_\theta} = \frac{M_0 L^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{\frac{EI}{L}} = \frac{3 M_0 L^2}{2EI}$$

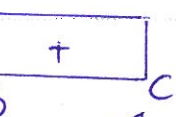


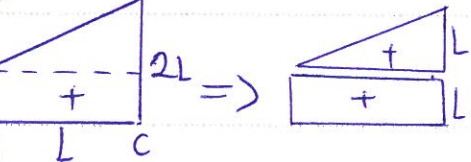
مثال ۷: در تیر مقابل، تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.



در قسمت صلب $EI = \infty$ بوده و

حاصل $\int \frac{m \bar{m}}{EI} dx$ صفر می شود.

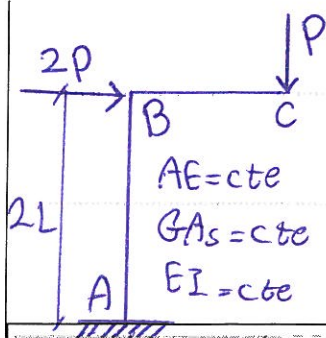
$M(x)$: PL 

$\bar{m}(x)$: 

$$\int_B^C \frac{m \bar{m}}{EI} dx = \left[(PL) \times L \times \frac{L}{2} + (PL) \times L \times L \right] = \frac{3}{2} PL^3$$

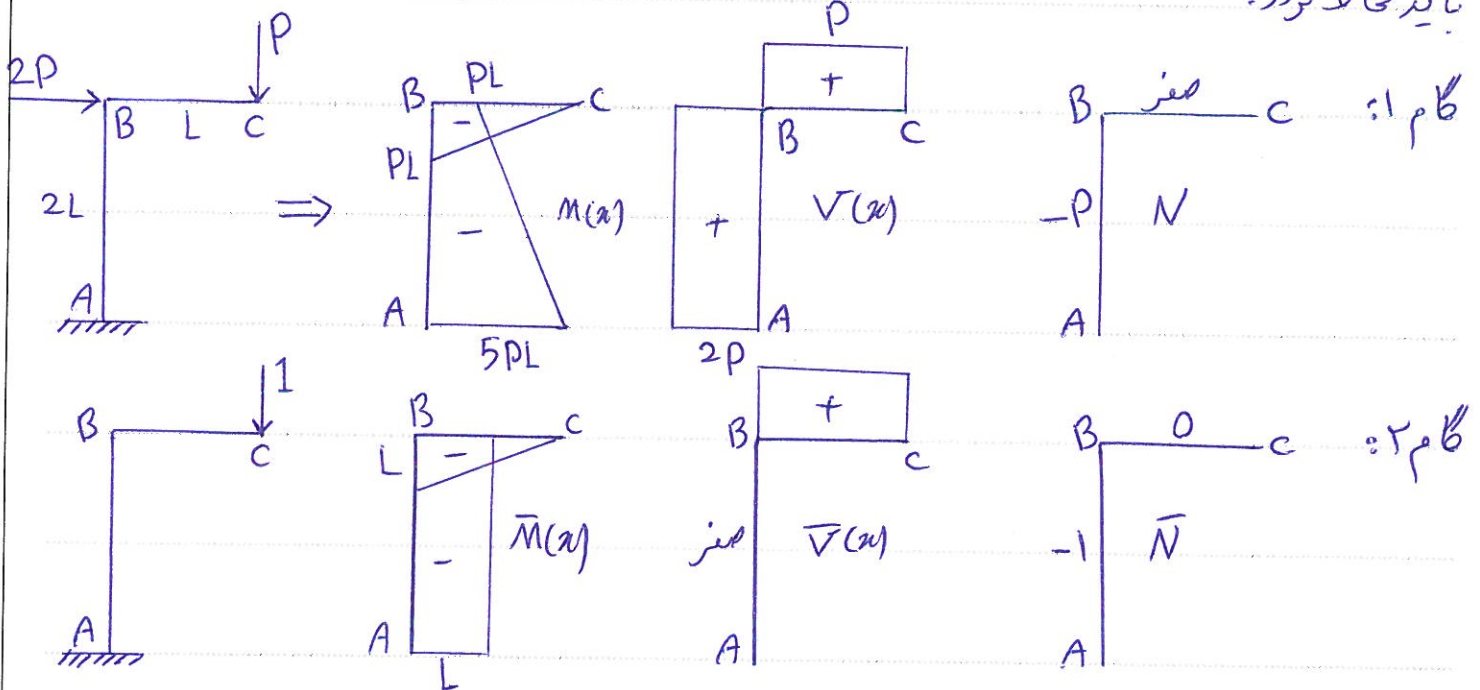
مستطیل درشت مستطیل درشت

$$\Delta_c = \int_A^B \frac{m \bar{m}}{EI} dx + \int_B^C \frac{m \bar{m}}{EI} dx + \frac{\bar{R} \bar{R}}{k_\Delta} = 0 + \frac{3 PL^3}{2EI} + \frac{P \times 1}{\frac{EI}{L^3}} = \frac{5 PL^3}{2EI}$$



مثال ۸: در قاب زیر، تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.

باتوجه به معرفی پارامترهای EI و GA_s برای اعضاء، اثر تغییر شکل های خمشی، برشی و محوری باید لحاظ گردد.



گام ۳:

$$\Rightarrow \int_A^B \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{(-PL) \times (-L) \times 2L}_{\text{مثلث در مثلث}} + \underbrace{(-4PL) \times (-L) \times \frac{2L}{2}}_{\text{مثلث در مثلث}} \right] = \frac{6PL^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \int_B^C \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{(-PL) \times (-L) \times \frac{L}{3}}_{\text{مثلث در مثلث با قاعده های زیرهم}} \right] = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \int_A^B \frac{V \bar{V}}{GA_s} dx = 0$$

چون $V(x) = +2P$ و $\bar{V}(x) = \text{صفر}$

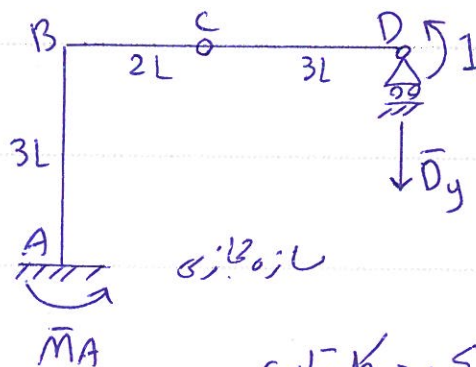
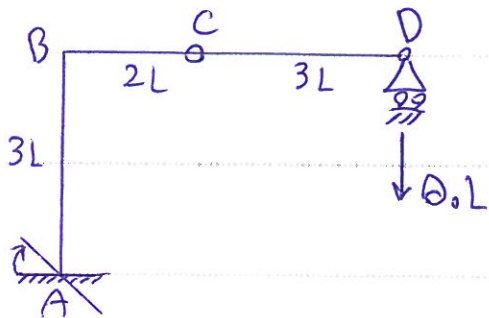
$$\Rightarrow \int_B^C \frac{V \bar{V}}{GA_s} dx = \frac{1}{GA_s} [P \times 1 \times L] = \frac{PL}{GA_s}$$

چون $V(x) = +P$ و $\bar{V}(x) = +1$

$$\Delta_{Cy} = \left[\int_A^B \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_B^C \frac{M\bar{M}}{EI} dx \right] + \left[\int_A^B \frac{V\bar{V}}{GA_s} + \int_B^C \frac{V\bar{V}}{GA_s} dx \right] + \left[\left(\frac{N\bar{N}L}{AE} \right)_{AB} + \left(\frac{N\bar{N}L}{AE} \right)_{BC} \right] = \left[\frac{5PL^3}{EI} + \frac{PL^3}{3EI} \right] + \left[0 + \frac{PL}{GA_s} \right] + \left[\frac{(-P)(-1) \times 2L}{AE} + 0 \right] =$$

$$= \frac{19PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA_s} + \frac{2PL}{AE}$$

مثال ۹: در قلاب مقابل، دوران نقطه D را بدست آورید.



حل:

نقطه C: $\sum M_C = 0$

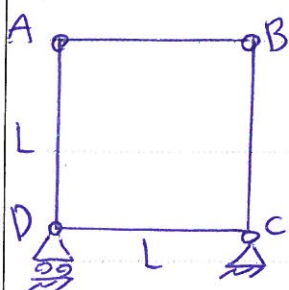
$$\Rightarrow \bar{D}_y = \frac{1}{3L}$$

در قلاب مقابل: $\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A = \frac{2}{3}$

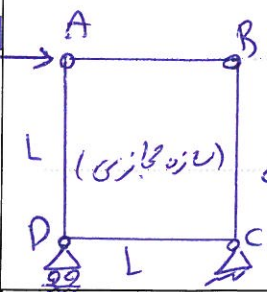
رابطه کار مجازی: $\theta_D + W_R = 0 \Rightarrow \theta_D \left(\bar{M}_A \times \theta_A + \bar{D}_y \times \delta_D \right) = 0 \Rightarrow \theta_D - \frac{2}{3} \theta_A + \frac{1}{3L} \times (3L) = 0$

$$\Rightarrow \theta_D = \frac{\theta_A}{3}$$

در قلاب مقابل بدون $\bar{M}_A$ و θ_D



مثال ۱۰: در قلاب مقابل، اعضاء AD و DC در انتهای فرکانس یافت به اندازه ۵٪ کوتاه تر از مقدار واقعی ساخته شده اند. پس از نصب سازه، تغییر مکان افقی نقطه A را بدست آورید. (EI ثابت است)



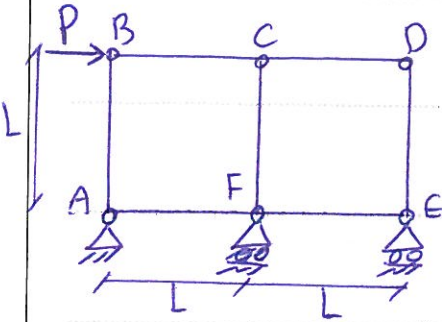
حل: با توجه به همین بودن سازه، در اثر خطای ساخت در اعضا نیروی داخلی ایجاد نمی شود.

(۱) خنایا که کوتاه تر ساخته شدن $\bar{F}_{AD} = 1$ و $\bar{F}_{DC} = 0$ تحلیل سازه مجازی:

رابطه کار مجازی: $\Delta A_x = \sum \bar{F} \delta \Rightarrow \Delta A_x = (1 \times (-5)) + (0 \times (-5)) = -5$

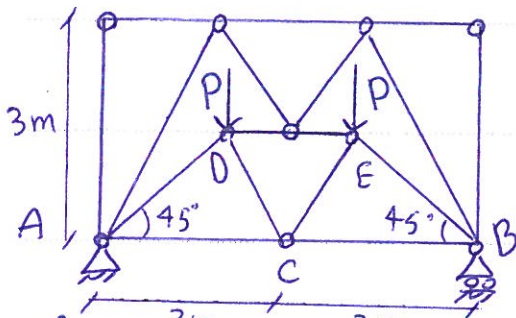
تمرینات فصل چهارم:

۱- در فرمای قابل تغییر مکان افقی نقطه B را بدست آورید. (AE یکسان)



۲- در اثر افزایش دمای اعضاء به مقدار 30° درجه سانتی گراد،

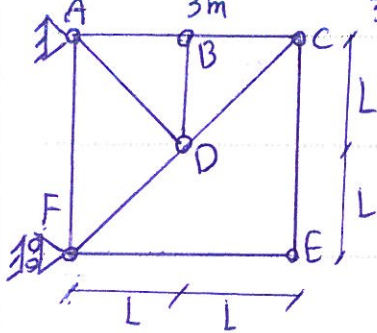
تغییر مکان افقی تکیه گاه B را بدست آورید.



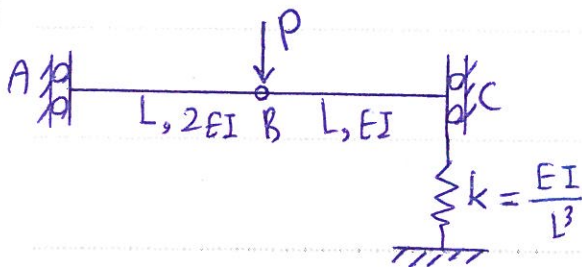
۳- در فرمای قابل اگر سلبه BC را به اندازه ΔT گرم کنیم وسیله BD را

به اندازه ΔT سرد کنیم، جابه جایی افقی مفصل C کدام است؟

(AE و α در اعضاء یکسان است)

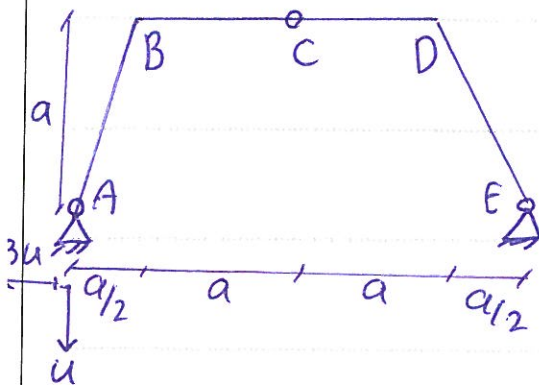


۴- در تیر شکل قابل، تغییر مکان نقطه A را بدست آورید.



۵- در اثر نشست δ تکیه گاهی در تکیه گاه A، دوران نقطه

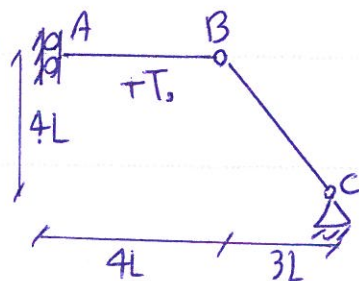
B را بدست آورید.



۶- در اثر افزایش دمای سلبه AB به

اندازه T ، جابه جایی قائم تکیه گاه B را

بدست آورید. (AE و EI ثابت)

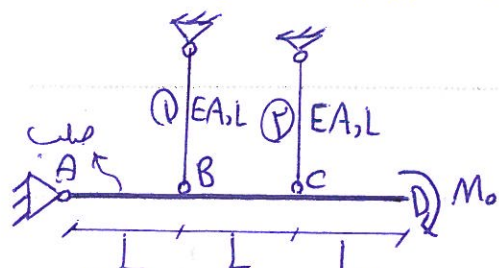


فصل پنجم: تحلیل سازه های ناهمبند

در حل سازه های ناهمبند در حالت کلی، از ترکیب معادلات تعادل و معادلات سازگاری برای بدست آوردن نیروهای مجهول استفاده می شود. در روش نرمی (نیرو) ابتدا نیروی چند میل به رابطه عنوان مجهولات اصلی سازه در نظر می گیریم. در مرحله بعدی با استفاده از معادلات تعادل سایر نیروهای را براساس نیروی مجهول بدست می آوریم. در مرحله آخر با استفاده از معادلات سازگاری، ابتدا نیروهای مجهول و سپس نیروی سایر قسمت ها را بدست می آوریم.

در روش سختی (تغییر مکان) ابتدا یک یا چند تغییر مکان مناسب به عنوان مجهولات اولیه انتخاب می شوند. در مرحله بعدی نیروی قسمت های مختلف بر حسب تغییر مکان های مجهول نوشته شده و در انتها با استفاده از معادلات تعادل، ابتدا تغییر مکان های مجهول و سپس نیروهای مجهول بدست می آید.

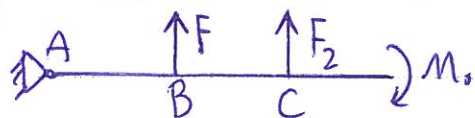
مثال ۱: نیروی ایجاد شده در میل های (۱) و (۲) را با دور روش نرمی و سختی بدست آورید؟



حل: سازه فوق دارای چهار گسسته است بنابراین

یک درجه ناهمبند است.

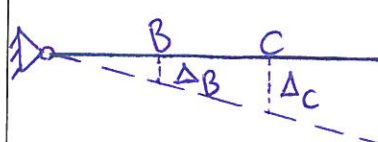
روش نرمی: با توجه به اینکه سازه یک درجه ناهمبند است، نیروی یکی از میل های (میل ۱) را برابر F فرض



کرده و سایر نیروها را بر حسب آن بدست می آوریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F \times L + F_2 \times 2L = M_o \Rightarrow F_2 = \frac{M_o}{2L} - \frac{F}{2}$$

در مرحله بعد با استفاده از معادله سازگاری نیروی F را بدست آورده و سپس سایر میل های را بدست می آوریم:

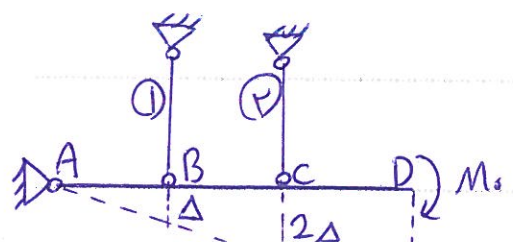


معادله سازگاری: $\Delta_C = 2\Delta_B \Rightarrow \frac{F_2 L}{EA} = 2 \frac{F_1 L}{EA}$

$\Rightarrow \frac{(\frac{M_0}{2L} - \frac{F}{2})L}{EA} = 2 \frac{FL}{EA} \Rightarrow F = \frac{M_0}{5L}$

$\Rightarrow F_2 = \frac{M_0}{2L} - \frac{M_0}{10L} = \frac{2M_0}{5L}$

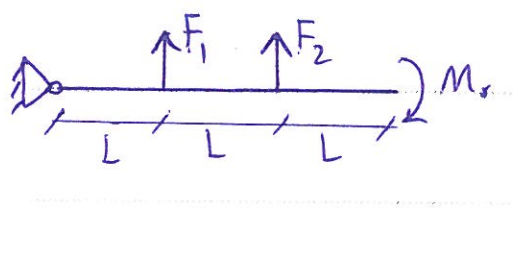
روش سختی: ابتدا تغییر مکان نقطه B را به عنوان مجهول اولیه برابر Δ فرض می‌کنیم. با استفاده از تغییر موقعیت مسم صلب نیرو در مرحله‌های (۱) و (۲) بر حسب تغییر مکان Δ عبارت است از:



$\Delta_B = \Delta = \frac{F_1 L}{EA} \Rightarrow F_1 = \frac{EA}{L} \Delta \quad (I)$

$\Delta_C = 2\Delta = \frac{F_2 L}{EA} \Rightarrow F_2 = 2 \frac{EA}{L} \Delta \quad (II)$

در مرحله بعد با استفاده از معادلات تعادل تغییر مکان مجهول Δ را

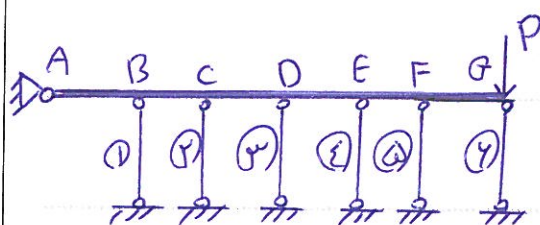


به دست می‌آوریم: $\sum M_A = 0 \Rightarrow F_1 \times L + F_2 \times 2L = M_0$

$\frac{EA}{L} \Delta \times L + \frac{2EA}{L} \Delta \times 2L = M_0 \Rightarrow \Delta = \frac{M_0}{5EA}$

در مرحله آخر با جایگذاری Δ در معادلات (I) و (II) نیروهای F_1 و F_2 به دست می‌آید:

$F_1 = \frac{EA}{L} \Delta = \frac{EA}{L} \times \frac{M_0}{5EA} = \frac{M_0}{5L}$ ، $F_2 = 2 \frac{EA}{L} \Delta = \frac{2EA}{L} \times \frac{M_0}{5EA} = \frac{2M_0}{5L}$



تقایم روشی سختی و نرمی در حل سازه‌های ناهمبندی:

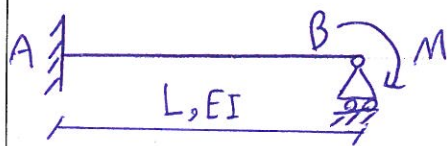
سازه قابل رادرنظر بگیرد. این سازه با ۸ قید به زمین متصل شده

و در نتیجه ۵ درجه ناهمبندی است. در صورت استفاده از روشی نیرو (نرمی)، تعداد مجهولات برابر درجه ناهمبندی

$DI = 5$ می‌باشد و در نتیجه برای حل سوال احتیاج به ۵ معادله سازگاری خواهیم داشت.

در سازه نشان داده شده درجه آزادی برابر (۱) می باشد. درجه آزادی یک سازه تعداد تغییر مکان های مستقل یک سازه است که تغییر مکان سایر نقاط سازه را بتوان بر اساس آن نوشت. در صورت استفاده از روش سختی، تعداد مجهولات برابر درجه آزادی سازه یعنی (۱) خواهد بود.

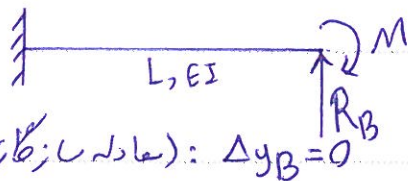
نکته: در پیدا کردن روش مناسب برای حل یک سازه نا معین، درجه نا معینی و درجه آزادی سازه را بدست می آوریم. اگر درجه نا معینی از درجه آزادی بزرگتر باشد روش سختی از روش نرمی مناسب تر بوده و اگر درجه آزادی از درجه نا معینی بیشتر باشد، روش نرمی مناسب تر است.



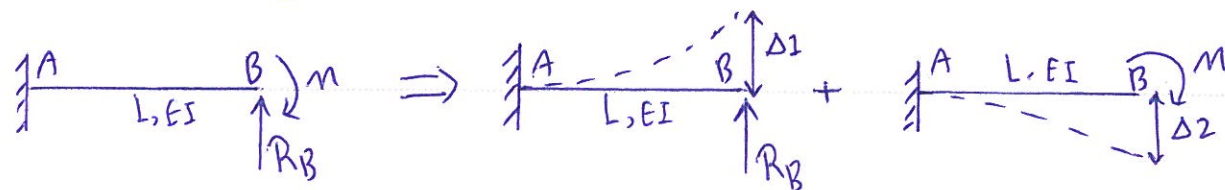
مثال ۲: در تیر مقابل یکی از اهل قائم تکیه گاه B را بدست آورید.

حل: تیر مقابل یک درجه نا معین است بنابراین یکی از اهل تکیه گاه B

را حذف کرده و در عوض یک نیروی قائم در نقطه B قرار می دهیم:

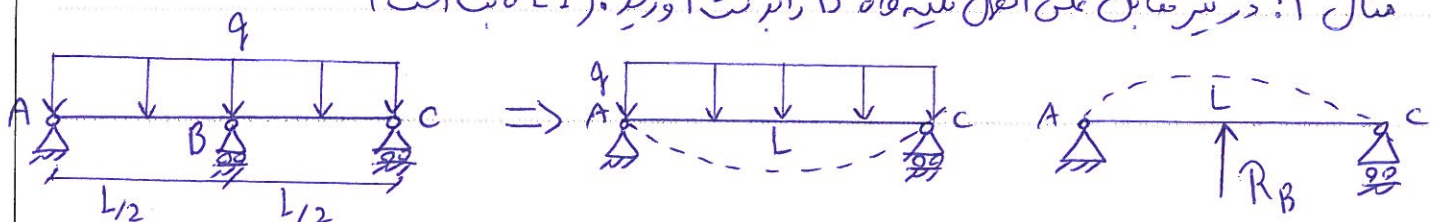


(معادله سازگاری): $\Delta y_B = 0$



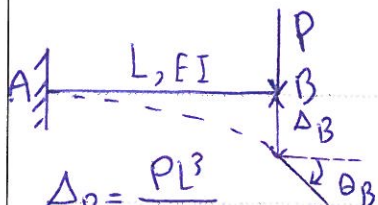
$$+\downarrow \Delta y_B = -\frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} \xrightarrow[\Delta y_B = 0]{\text{معادله سازگاری}} -\frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3M}{2L}$$

مثال ۳: در تیر مقابل یکی از اهل تکیه گاه B را بدست آورید. (EI ثابت است)



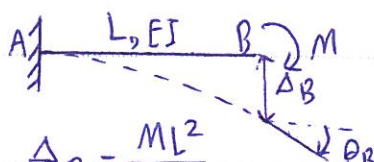
$$\Delta B_y = 0 \Rightarrow +\downarrow \Delta B_y = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{R_B L^3}{48EI} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5qL}{8}$$

روابط حلقه‌ای برای تحلیل سازه‌های ناهمبند:



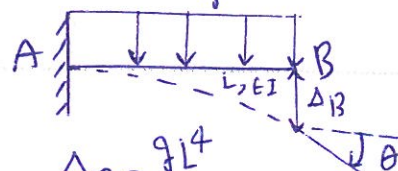
$$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$



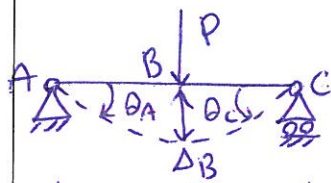
$$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{ML}{EI}$$



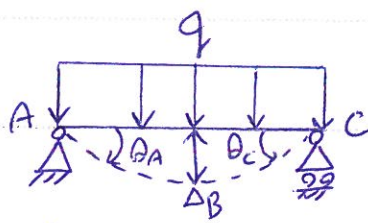
$$\Delta_B = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$



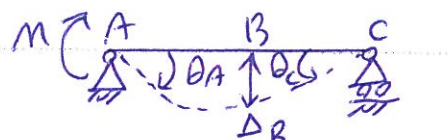
$$\Delta_B = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\theta_A = \theta_C = \frac{PL^2}{16EI}$$



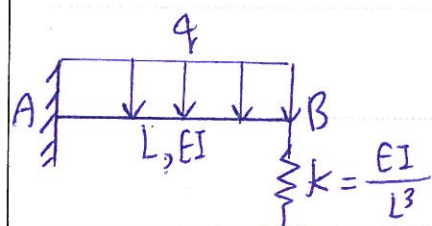
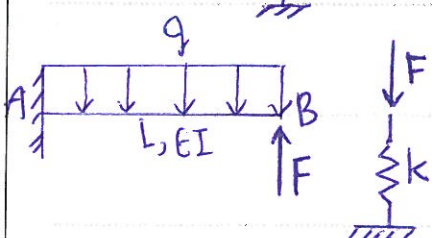
$$\Delta_B = \frac{5qL^4}{384EI}$$

$$\theta_A = \theta_C = \frac{qL^3}{24EI}$$



$$\Delta_B = \frac{ML^2}{16EI}$$

$$\theta_A = \frac{ML}{3EI}, \quad \theta_C = \frac{ML}{6EI}$$

مثال ۴: در تیر مقابل لنگر در تکیه گاه A و نیروی قتر را بدست آورید.

معادله سازگاری: $\Delta_{By} = \Delta_{\text{قتر}} = \frac{F}{k}$

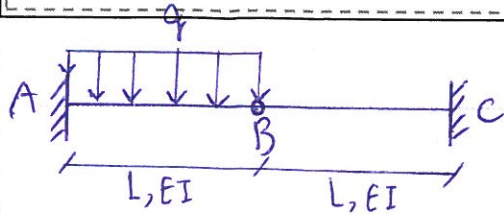
$$+\downarrow \Delta_{By} = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{FL^3}{3EI}$$

$$+\downarrow \Delta_{\text{قتر}} = \frac{F}{k} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}}$$

$$\Rightarrow \Delta_{By} = \Delta_{\text{قتر}} \Rightarrow \frac{qL^4}{8EI} - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{\frac{EI}{L^3}}$$

$$\Rightarrow F = \frac{3qL}{32}$$

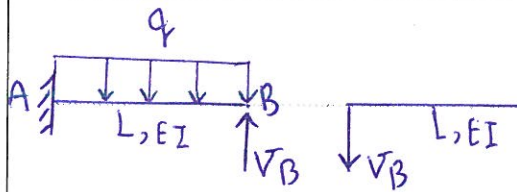
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{qL^2}{2} - F \times L = \frac{13qL^2}{32}$$



✓ مثال ۵: در تیر ناحیه مقابل تکیه مطلوب است:

الف - انگردگی تکیه کاه

ب - تیب استیب منفی Δ_B



معادله سازگاری: $\Delta_B^L = \Delta_B^R$

حل:

الف)

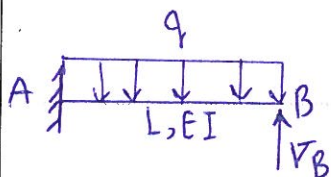
$$+\downarrow \Delta_B^L = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{V_B L^3}{3EI}$$

$$+\downarrow \Delta_B^R = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \Delta_B^L = \Delta_B^R \Rightarrow \frac{qL^4}{8EI} - \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow V_B = \frac{3qL}{16}$$

$$M_A = \frac{qL^2}{2} - V_B L = \frac{qL^2}{2} - \frac{3qL^2}{16} = \frac{5qL^2}{16}$$

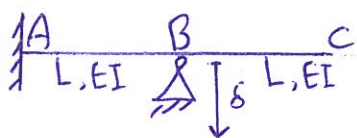
$$M_C = V_B L = \frac{3qL^2}{16}$$

ب)



$$+\circlearrowleft \theta_B^L = \frac{qL^3}{6EI} - \frac{V_B L^2}{2EI} = \frac{7qL^3}{96EI}$$

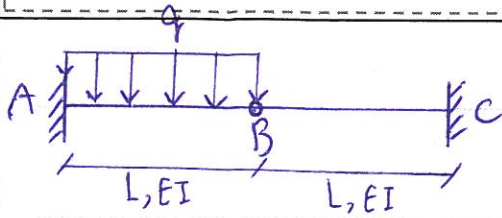
✓ مثال ۶: اگر در تیر مقابل تکیه کاه B به اندازه δ نشست کند. تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.



معادله سازگاری: $\Delta_B = \delta$

$$\Rightarrow +\downarrow \Delta_B = \frac{R_B L^3}{3EI} = \delta \Rightarrow R_B = \frac{3EI\delta}{L^3}$$

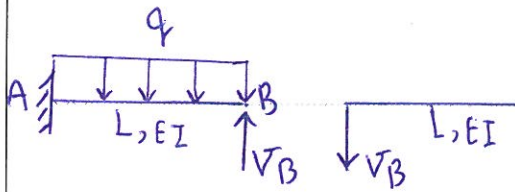
$$+\downarrow \Delta_C = \Delta_B + \theta_B \times L \Rightarrow \Delta_C = \delta + \frac{R_B L^2}{2EI} \times L = \delta + \frac{\frac{3EI\delta}{L^3} \times L^2}{2EI} \times L \Rightarrow \Delta_C = \frac{5\delta}{2}$$



✓ مثال ۵: در تیرناحین مقابل مطلوب است:

الف - لنگرهای تکیه گاهی

ب - ضریب پخش در محفل B



معادله سازگاری: $\Delta_B^L = \Delta_B^R$

حل:

الف)

$$+\downarrow \Delta_B^L = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{V_B L^3}{3EI}$$

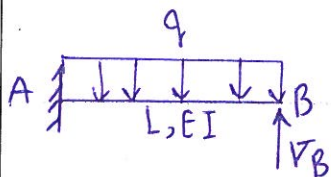
$$+\downarrow \Delta_B^R = \frac{V_B L^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_B^L = \Delta_B^R \Rightarrow \frac{qL^4}{8EI} - \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow V_B = \frac{3qL}{16}$$

$$M_A = \frac{qL^2}{2} - V_B L = \frac{qL^2}{2} - \frac{3qL^2}{16} = \frac{5qL^2}{16}$$

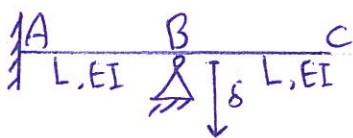
$$M_C = V_B L = \frac{3qL^2}{16}$$

ب)



$$+\circlearrowleft \theta_B^L = \frac{qL^3}{6EI} - \frac{V_B L^2}{2EI} = \frac{7qL^3}{96EI}$$

✓ مثال ۶: اگر در تیر مقابل تکیه گاه B به اندازه δ نشست کند. تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.



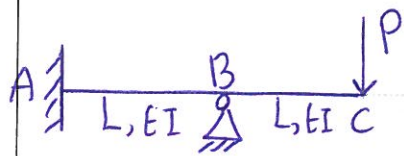
$\Delta_B = \delta$ معادله سازگاری: $\Delta_B = \delta$

$$\Rightarrow +\downarrow \Delta_B = \frac{R_B L^3}{3EI} = \delta \Rightarrow R_B = \frac{3EI\delta}{L^3}$$

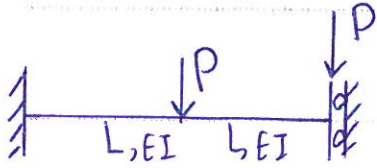
$$+\downarrow \Delta_C = \Delta_B + \theta_B \times L \Rightarrow \Delta_C = \delta + \frac{R_B L^2}{2EI} \times L = \delta + \frac{3EI\delta}{L^3} \times L^2 \times L = \delta + \frac{3EI\delta}{L^3} \times L^3 = \delta + 3\delta = 4\delta$$



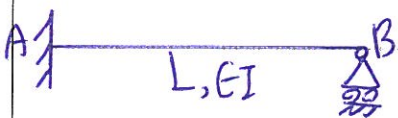
تمرینات فصل پنجم:



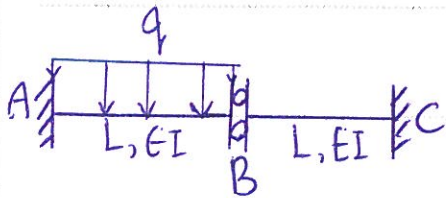
۱- در تیر مقابل لنگر یک‌گانه را بدست آورید.



۲- در تیر ناحیه مقابل لنگرهای یک‌گانه را بدست آورید.



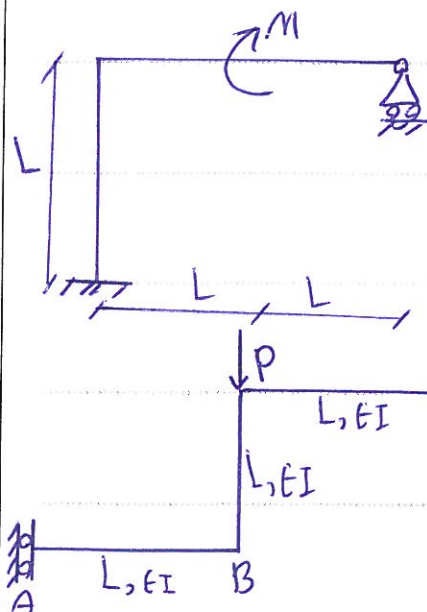
۳- اگر یک‌گانه A به اندازه 2 cm و یک‌گانه B به اندازه 1 cm نسبت کند، در انحراف مقدار M_A را بدست آورید.



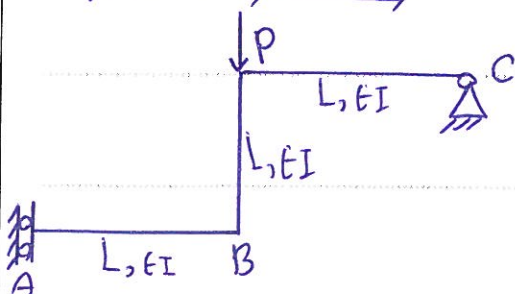
۴- در تیر مقابل مطلوب است:

الف) لنگرهای یک‌گانه

ب) دوران نقطه B



۵- در سازه مقابل لنگر در یک‌گانه A را بیابید. (EI ثابت)



۶- عکس العمل افقی یک‌گانه C از قاب مقابل را بدست آورید.